

## Introduction

La VAN (=NPV est la différence entre le montant investi et la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs attendus.

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^N \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

avec

- $I_0$  : investissement initial
- $CF_t$  : cash-flow attendu en date  $t$
- $r$  : taux d'actualisation, coût du capital
- $N$  : durée de vie (=lifespan) de l'investissement

Appliquée, par exemple, à un investissement industriel, la règle de la VAN stipule que tout projet dont la VAN est **égale ou supérieure** à zéro doit être conservé.

- VAN & coût des fonds :

le paramètre clé de la formule VAN est le **taux d'actualisation**

- Supposons qu'un entrepreneur a un projet (une innovation). Cependant, il n'a pas (pas assez) d'argent pour le financer.

Il peut le vendre. Plus précisément, il peut vendre tout ou partie des droits de propriété sur l'innovation (par exemple à un fonds de capital-risque). Néanmoins, il / elle pourrait toujours l'implémenter en étant l'employé / partenaire des nouveaux propriétaires du projet.

*Quel prix l'entrepreneur peut-il demander ?*

Chaque investisseur externe potentiel évaluera le rendement minimal qu'il attend du projet afin d'y allouer des fonds. Ce rendement minimal est appelé le **coût des fonds** (=cost of funds) ou le **coût du capital** (=cost of capital).

Ce retour minimal requis (attendu) dépend d'un ensemble complexe de paramètres:

- Le risque du projet (risque économique: incertitude de la demande, des coûts ...)
- La qualité de l'information (l'entrepreneur est-il digne de confiance, l'information est-elle vérifiable et certifiée par un tiers ...)
- L'existence de **coûts de transaction** (=transaction costs): taxes, frais, pots-de-vin à verser à certains «intermédiaires» ...

- la protection des droits de propriété: en cas de faillite ou de litige avec l'entrepreneur ...
- La liquidité de l'investissement: la possibilité de revendre plus ou moins facilement les droits de propriété sur le projet.

Ce **rendement minimal attendu** (=expected minimal return) définit le **taux d'actualisation** (=discounting rate) que chaque investisseur externe potentiel appliquerait.

Le coût du capital est un concept ex ante, càd que le rendement réalisé (ex post) sera en général différent.

Compte tenu de son coût en capital, chaque investisseur externe potentiel pourrait alors (théoriquement) calculer une valeur maximale qu'il est prêt à payer pour ce projet (similaire à un processus d'enchères).

Si le marché des droits de propriété est compétitif, l'entrepreneur sélectionnera l'investisseur externe disposé à payer le prix le + élevé, càd avec le rendement requis le plus bas (coût des fonds).

Par conséquent, le nouveau propriétaire du projet investit dans un projet avec une VAN nulle(=0) de son point de vue.

⇒ L'investissement dans un titre financier est un investissement à VAN zéro (à condition que le marché soit compétitif).

⇒ Un projet à VAN zéro rapporte (=yields) le coût des fonds.

⇒ Techniquement: le coût des fonds est le taux de rentabilité interne (TRI) =(Internal Rate of Return IRR) de l'investissement dans la sécurité.

**Plus r est petit, plus la VAN est élevée**

Formul de tarification(=pricing) la + générale

– on réécrit donc la formule de départ :

$$NPV = 0 = -I_0 + \sum_{t=1}^N \frac{CF_t}{(1+r)^t} \Rightarrow I_0 = \sum_{t=1}^N \frac{CF_t}{(1+r)^t} = P$$

→ Le prix d'un actif financier est la somme de ses flux de trésorerie actualisés

$I_0$  correspond désormais à la valeur initiale du projet pour un investisseur avec un coût des fonds  $r$ , c'est-à-dire que c'est le prix des **actifs financiers** (=financial assets) qui regroupe les droits de propriété sur les flux de trésorerie(=cash flows) générés par le projet.

Les modèles de tarification développés en finance fournissent des méthodes pour calculer le coût des fonds  $r$ . En fait, il nous faut  $CF_t$  et  $r$  pour avoir le prix mais en finance on a déjà  $P$  et la description des cash-flow (  $CF_t$ ). Il nous manque que  $r$ .

→ en finance y a pas de prix fixe. Il y a des modèles de prix relatifs.

## Chapter 1 : fixed income (=revenue fixe)

### Definition

Les revenus fixes sont des titres de créance (= actifs) versant un revenu fixe (càd les paiements d'intérêts réguliers).

Également des titres de créance payant un revenu variable (mais à dates fixes) et des contrats dérivés de titres à revenu fixe.

**Titre à revenu fixe typique** (=typical fixed income security) : obligation à revenu fixe : titre à long terme appartenant à une dette collective.

Dette collective: une entreprise emprunte de l'argent et quelqu'un l'aide à rembourser.

### Qui sont les émetteurs (=issuers = borrowers) ?

Les Sociétés par actions, groupements d'intérêt économique, personnes morales publiques (Etats, régions ...), coopératives au capital supérieur à 200k €, mutuelles ... et même associations.

Les émetteurs doivent avoir plus de 2 ans, deux bilans régulièrement approuvés et des capitaux propres entièrement libérés.

Bcp peuvent acheter des actions (=bonds = a share) mais bcp le font pas car ça coûte cher. Il y a une concurrence entre ceux qui veulent devenir émetteurs.

Long terme > 1 an

Court terme < 1 an

### A. Caractéristiques d'une obligation

Valeur nominale (ou valeur faciale): montant de référence dans le calcul du revenu payé par l'obligation. (=nominal value).

Prix d'émission (=Issue price) : prix auquel l'obligation est vendue aux investisseurs au moment de l'émission, c'est-à-dire montant effectivement emprunté par l'émetteur (y compris les frais à payer aux conseillers de l'émetteur et aux banques distributrices).

**Trois situations:**

- i. L'obligation (= the bond) est vendue au pair (=at par): prix d'émission = valeur nominale
- ii. L'obligation est vendue au-dessus du pair: prix d'émission > valeur nominale
- iii. L'obligation est vendue en dessous du pair: prix d'émission < valeur nominale

Si imposition des revenus d'intérêts (=taxation of interest income) > imposition des plus-values (=taxation of capital gains) → c'est intéressant pour l'investisseur de payer moins d'impôts et de payer une plus-value plus élevée à la fin en guise de compensation.

-Valeur de remboursement (=redemption value) : montant du capital effectivement remboursé aux prêteurs. Peut être différent de la valeur nominale ou du prix d'émission. Si la valeur de remboursement > valeur nominale ⇒ prime de remboursement positive (=positive redemption premium). La fiscalité pourrait en être une des raisons.

– Échéance (=Maturity) : temps restant jusqu'au dernier remboursement (=pay off) payé par l'obligation. Pas de maturité initiale minimale. Cependant, la plupart des obligations sont émises avec des échéances initiales comprises entre 4 et 8 ans pour les entités privées, et jusqu'à 30 ans (ou plus) pour les entités étatiques. La maturité change tous les jours. La maturité doit être suffisamment longue pour «amortir» le coût.

C'est plus long pour les États que pour les entreprises car on est sûr que dans 20ans l'État sera toujours là & pourra toujours payer ses dettes alors que c'est pas aussi sûr pour une ese.

- Taux nominal (=nominal rate) : taux d'intérêt qui entre dans le calcul du revenu fixe (coupon) :

$$\text{coupon} = \text{taux nominal} \times \text{valeur nominale}$$
$$37,5 \text{ €} = 3,75\% \quad \times \quad 1000 \text{ €}$$

Le taux d'intérêt nominal peut être soit certain (fixe ou progressif) flottant (par rapport à un taux de référence donné), soit nul (zéro coupon).

Les coupons peuvent être payés annuellement, semestriellement ou trimestriellement. Par exemple, bi-annuellement (=semi-annually):

$$18,75 \text{ €} = (3,75\% \times 0,5) \times 1000 \text{ €}$$

0,5 car c'est semestriellement :  $6/12 = 0,5$

En Europe, coupons payés annuellement.  
Aux USA, tous les 6 mois.

→ C'est des conventions, coutumes.

-Plan de remboursement (repayment scheme): échancier de remboursement de la valeur de remboursement. De nos jours, le « bullet repayment » est très majoritaire (= remboursement in fine): la valeur de remboursement est payée en une seule fois à la fin de l'échéance initiale, avec le dernier coupon.

Pourquoi ? Car aujourd'hui les marchés obligataires (=bond markets) sont dominés par les États & les institutions. Et ils renouvellent tout le temps leur dette donc on retarde énormément le paiement. C'est plus facile de favoriser le remboursement in fine pour les États.

- Illustration

– Émission d'obligations (=Bond issue) par l'Université de Cardiff, 02/04/2016

|                       |                                                                                                                                                |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| The issuer            | Cardiff University                                                                                                                             |
| Issue amount          | £300,000,000                                                                                                                                   |
| Interest rate         | 3.000 per cent                                                                                                                                 |
| Issue price           | 97.971 per cent                                                                                                                                |
| Form and denomination | The Bonds will be issued in bearer form in the denominates of £100,000 and higher integral multiples of £1,000 (up to and including £199,000). |
| Final redemption      | 7 December 2055                                                                                                                                |
| Gross yield           | 3.097 per cent                                                                                                                                 |
| Coupon payments       | payable semi-annually in arrear on 7 June and 7 December in each year                                                                          |

= pr acheter 1 cent de l'action, faut payer 97,971

= - on paie pr avoir qqch + on a un grand rendement

Taux d'intérêt = taux nominal Interest

Rendement brut (= Gross yield) = rendement = return

Prix d'émission < taux d'intérêt.

Bearer form : on nomme pas le propriétaire de l'action = anonyme.

- Émissions brutes d'obligations ds la zone euro (€billions) :

Les émetteurs principaux sont les acteurs financiers (banques, compagnies d'assurance). Ils représentent 50% du marché.

En 2<sup>nd</sup>, viennent les gouvernements

Enfin, on a les acteurs non financiers qui sont des entités privées.

## B. La valorisation (=valuation) des obligations à taux fixe(= fixed rate bonds).

Considérons une obligation à taux fixe avec un remboursement in fine et aucune prime de rachat(=redemption premium), en négligeant le risque d'inflation

Quelle est la valeur (= prix) des gains (coupons et rachat) censés être versés aux investisseurs?

La valeur actuelle des gains attendus! Le principe de la VAN s'applique.

Quel taux d'actualisation(=discount rate) doit-on appliquer aux flux de trésorerie de l'obligation?

Obligations à taux fixe (=fixed rate bonds) = principale catégorie d'obligations sur le marché financier

pay-offs = cash flows

### 1. Taux de zero coupon (=Zero coupon rates)

Une obligation à coupon zéro (ZC) est une obligation qui ne paie aucun coupon. Il n'y a que deux flux financiers dans une ZC:

- i. Le ou les investisseurs payent le prix d'émission (P).
- ii. L'émetteur paie la valeur de remboursement (R)(=redemption value) à une date future fixe (échéance)

Remarques :

Un taux de ZC  $r_t$  est le TRI (=IRR) de l'investissement dans un ZC de maturité  $t$  :

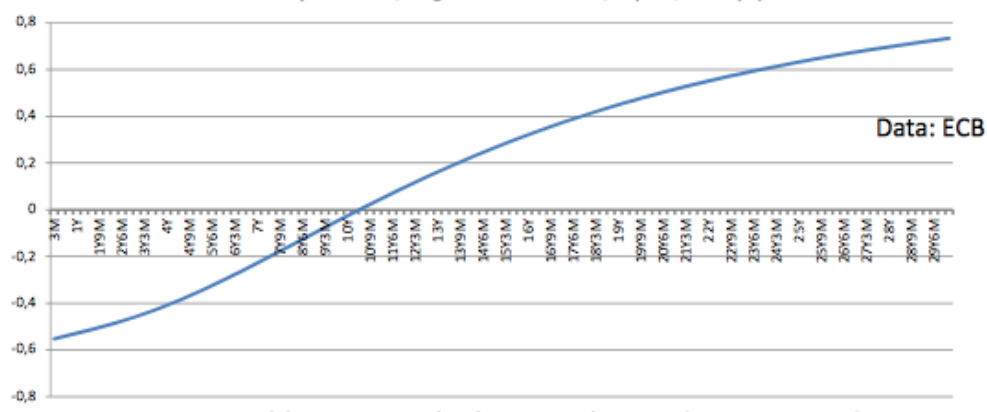
$$P = \frac{R}{(1 + r_t)^t} = \text{taux ZC}$$

– Toute obligation peut être décrite comme un portefeuille de ZCs. Ainsi, le prix d'une obligation est le prix d'un portefeuille de ZCs.

- Pour fixer le prix d'une obligation, il faut un ensemble de taux ZC (=ZC rate): courbe des taux (=yield curve)

- Les théories de la courbe des taux (=yield curve) indiquent que, toutes choses étant égales par ailleurs, le taux d'actualisation applicable (=the applicable discount rate) est lié à l'échéance de chaque remboursement (=pay-off).

Courbe des taux de la zone euro (=Euro area yield curve), toutes les obligations d'État (=all government bonds), Sept. 4, 2020 (%) : cette courbe change tous les j



En pratique, les courbes de rendement sont construites en utilisant des taux de ZC (=ZC rates) observés ou calculés et des techniques statistiques afin d'obtenir des courbes lisses. Pour la zone euro, la courbe des taux est fournie quotidiennement par la Bundesbank et est calculée à partir des cours ZC(=ZC prices) observés des obligations souveraines allemandes.

$$P = \frac{R}{(1 + r_t)^t}$$

. La Bundesbank voit P, R et t et dessine la courbe pour déduire r.

Les taux entrant dans la construction de la courbe des taux sont «sans défaut», c'est-à-dire que les obligations sous-jacentes au calcul sont supposées être remboursées avec certitude.

Les emprunteurs risqués (entreprises, pays moins bien notés ...) paient une prime de risque, ajoutée aux taux de rendement sans défaut.

Cet écart de crédit (=credit spread) compense les prêteurs(=lenders) pour le risque de crédit de l'émetteur, le risque de liquidité de l'obligation et le risque d'inflation.

– En règle générale, les écarts de crédit sont liés aux notations (=ratings).

Quand la qualité du crédit diminue, l'écart de crédit augmente.

Notation = opinion sur la capacité de l'emprunteur à faire face à ses obligations financières à l'avenir.

## 2. Formule de tarification des obligations (=Bond pricing formula)

- Le prix de l'obligation (à taux fixe) est donné par::

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{NV \cdot i}{(1 + r_t)^t} + \frac{R}{(1 + r_N)^N}$$

i: taux nominale, NV: valeur nominale

rt : taux d'actualisation (ZC) pour un remboursement à échéance t

R: valeur de rachat = redemption value = dernier paiement

$NV \times i$  = coupon de l'obligation

- Les variations de la courbe des taux déterminent les prix des obligations (en pratique sur une base quotidienne). La courbe des taux est un élément clé du prix des obligations (=bond pricing).

## 2. Rendement actuariel = Rendement à l'échéance = Yield to maturity

quel est le retour de la détention d'une obligation?

- Pour calculer le rendement d'un investissement, il faut comparer les fonds investis aux gains actualisés (attendus). Pour une obligation, définissez le rendement à l'échéance (YTM) comme le taux d'actualisation (=discount rate) r tel que:

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{i \cdot NV}{(1 + r)^t} + \frac{R}{(1 + r)^N}$$

(c pas la même formule que la bond pricing formula)

Le YTM est le retour attendu de la détention de l'obligation d'ici le dernier paiement. C'est une mesure de retour ex ante.

- Rappel: investir dans un titre est un investissement de 0 VAN, c'est-à-dire que le rendement attendu de l'investissement est le taux d'actualisation → le YTM est le TRI de l'investissement dans l'obligation.

– Remarques :

- i. Au moment de l'émission (=issuance), le YTM est appelé «taux actuariel brut, TAB» en France. Brut signifie ici avant toutes taxes. Le TAB est le rendement brut (=gross return) d'un investisseur qui achèterait l'obligation à l'émission et la conserverait sur toute sa maturité, à condition que l'émetteur ne fasse pas défaut.
- ii. Les obligations ayant des caractéristiques similaires (maturité, risque) devraient avoir des caractéristiques similaires YTM → YTM permet de comparer les obligations.

TAB = rendement actuariel à l'émission.

- iii. Il existe une relation inverse entre le prix d'une obligation et son YTM. Plus le YTM est élevé, plus le prix est bas et vice versa.

- Là encore, cela reflète le fait que le rendement d'un investissement est déterminé par la comparaison du montant investi et des flux de trésorerie versés par l'obligation.

- Ici, les flux de trésorerie sont donnés (coupons, valeur de remboursement). Plus le prix payé pour acheter ces flux de trésorerie est bas, plus le rendement attendu de l'investissement est élevé.

- Le taux nominal n'est pas le rendement d'un investissement dans une obligation mais simplement une caractéristique de l'obligation.

- **Illustration :**

Le 19 mars 2012, une société émet une obligation à taux fixe(=fixed rate bond) (NV 1000 € et taux 4%) d'une maturité initiale de 8 ans. Le 1<sup>er</sup> coupon est payable le 19 mars 2013.

L'obligation est remboursée au pair avec un paiement in fine (=bullet).

NV = nominal value

Le YTM à l'émission est :

$$984 = \sum_{t=1}^8 \frac{40}{(1 + TAB)^t} + \frac{1000}{(1 + TAB)^8} \Leftrightarrow TAB = 4,24\%$$

Le prix (984) est pour 1000

984 = prix d'émission fixé par l'émetteur (=issuer)

En pratique, les caractéristiques de l'obligation sont fixées à l'avance. Le prix d'émission est déterminé le plus tardivement possible, afin de s'adapter aux attentes des investisseurs.

Les obligations du gouvernement français sont des OAT

- Pourquoi le rendement d'une obligation négociée sous le pair est-il supérieur à son taux nominal?
- Si le prix  $P = NV = R$ , c'est-à-dire que l'obligation est cotée et remboursée au pair, le YTM est égal au taux nominal.

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{t=1}^N \frac{i \cdot NV}{(1+i)^t} + \frac{NV}{(1+i)^N} = NV \left[ \sum_{t=1}^N \frac{i}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+i)^N} \right] \\
 &= NV \left[ \frac{i}{(1+i)} \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} + \frac{1}{(1+i)^N} \right] = NV \left[ \frac{i}{(1+i)} \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{\frac{i}{(1+i)}} + \frac{1}{(1+i)^N} \right] \\
 &= NV \left[ 1 - \frac{1}{(1+i)^N} + \frac{1}{(1+i)^N} \right] = NV
 \end{aligned}$$

#### 4. La cotation des obligations

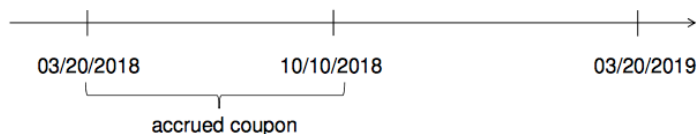
Contrairement aux actions, la cotation des obligations ne se fait pas en utilisant directement les prix, mais suit deux conventions.

##### a. Coupon footer quotation.

Les obligations sont cotées au pied du coupon, c'est-à-dire que le coupon couru depuis le dernier paiement d'intérêts n'est pas pris en compte dans l'évaluation.

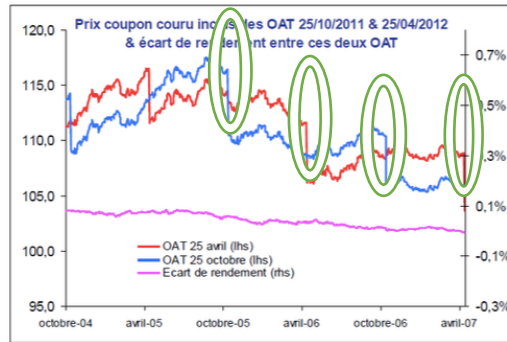
CC: coupon couru (=coupon accrued)

CC =  $i \cdot NV \cdot j / 365$ , avec  $j$  le nombre de jours écoulés depuis le dernier paiement d'intérêts.



Le prix au pied du coupon s'appelle le prix net (=clean price).

La cotation du pied de page du coupon évite la baisse du prix lors du paiement du coupon.



○ : les chutes correspondent au paiement du coupon

Le coupon accumulé est exclu du calcul du prix. La cotation est la façon dont les obligations sont présentées sur le marché: pas la valeur → clean price (en euro) = 1525. NV = 1000euros cotation = 152,5%

### b. en %.

Le prix (au pied du coupon) est indiqué en % de la valeur nominale. Cela garantit la comparabilité des obligations avec des valeurs nominales différentes.

### Illustration

Une obligation cote 113,70 le 4 juin 2016. Sa valeur nominale est de 1000 €, son taux nominal de 6,7% et elle paie un coupon annuel chaque 8 mars. La valeur de l'obligation est:

$$1000 \times \left( 113,70\% + \left( \frac{88}{365} \right) \times 6,7\% \right) = 1153,15 \text{ €}$$

113,70% = cotation en %

88 = nombre de jours entre le 9.03 & le 4.06

$$\left( \frac{88}{365} \right) \times 6,7\% = \text{valeur nominale en \%}$$

1153,15euros est le dernier prix. C'est le *dirty price*.

### 5. Étude de cas: le «mystère» des rendements négatifs (=negative yields)

- En regardant la courbe des taux de la zone euro, les taux d'actualisation semblent négatifs pour les maturités inférieures à 5,5 ans.

- Signifie que les investisseurs (prêteurs) acceptent un rendement négatif sur leur investissement. En pratique, les investisseurs acceptent de payer un prix si élevé pour l'obligation que le rendement à l'échéance (=YTM) devient négatif.

→ ils veulent investir leur argent dans un placement sûr (le court terme est plus sûr que le long terme)

- Cependant, cela n'implique pas que le taux d'intérêt nominal de l'obligation soit négatif.

– Illustration: Emission de l'Etat français le 20 juin 2016, maturité 4 ans et taux nominal 0,5%.

- Au 25/11/2016, l'obligation cotait 102,88%

$$102.88 = \frac{0.5 \times (1 - 0.431)}{(1 + YTM)^{0.569}} + \frac{0.5}{(1 + YTM)^{1.569}} + \frac{0.5}{(1 + YTM)^{2.569}} + \frac{100.5}{(1 + YTM)^{3.569}}; YTM \approx -0.30\%$$

c'est un calcul pour 100euros.

0.431 est the temps entre le 20.06.2016 & le 25.11.2016 en années.

Ici, le YTM est négatif → les investisseurs acceptent de payer

→ si les investisseurs paient un prix inférieur, ils obtiennent la même valeur à la fin de sorte que le YTM deviendra positif

### C. Mesurer le risque d'une obligation à taux fixe (=fixed rate bond)

- Supposons qu'il n'y ait pas de risque de défaut (par exemple une obligation souveraine). On néglige aussi le risque d'inflation.

– Quel est le risque de détenir cette obligation sur toute sa durée de vie, c'est-à-dire de l'acheter à l'émission et de la conserver (buy-and-hold)?

- Comme le calendrier des paiements est connu avec certitude et qu'il n'y a pas de risque de crédit, le rendement de l'investissement est fixe. L'investissement devient sans risque (pas d'incertitude).

→ vous savez quoi et quand vous avez reçu votre coupon et votre « redemption » .

- Cependant, si l'investisseur a besoin de revendre l'obligation à une date intermédiaire, il ne sait pas à quel prix il : il sera incertain.

Cette incertitude est liée au YTM d'obligations comparables au moment de l'opération -> risque de taux d'intérêt.

→ car le taux d'intérêt changera lorsque vous revendrez votre obligation

### 1. Identifier le risque de taux d'intérêt (=interest rate risk)

- Définissons  $F_t$  le cash-flow payé par l'obligation à la date t (soit coupon soit

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

redemption). Le prix de l'obligation est simplement:

–  $dP$ : variation de prix suite à une variation du YTM  $r$ . (on compare ce qu'on paie et ce qu'on obtient)

$\Delta = dP / dr \rightarrow$  peut-être que certaines obligations répondront plus ou moins aux  $\Delta$  de YTM

– on sait déjà que  $\Delta < 0$ .

- Cependant, pour mesurer le risque de taux d'intérêt de l'obligation, nous devons caractériser davantage  $\Delta$ .

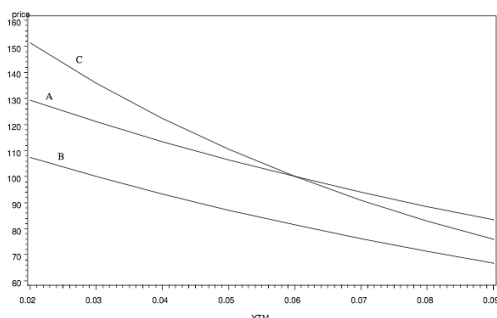
$\Delta = dP / dr$  = ce sera négatif ( $< 0$ )

= nous voulons comparer un changement de prix et un changement de YTM

|               | Bond A  | Bond B  | Bond C                                             |
|---------------|---------|---------|----------------------------------------------------|
| Nominal value | 100     | 100     | 100                                                |
| Maturity      | 8 years | 8 years | 15 years                                           |
| Coupon (%)    | 6       | 3       | 6                                                  |
| Redemption    | at par  | at par  | at par                                             |
| YTM value     |         |         |                                                    |
| 2%            | 129,30  | 107,33  | 151,40                                             |
| 3%            | 121,06  | 100     | 135,81                                             |
| 4%            | 113,47  | 93,27   | 122,24                                             |
| 5%            | 106,46  | 87,07   | 110,38                                             |
| 6%            | 100     | 81,37   | 100                                                |
| 7%            | 94,03   | 76,11   | 90,89                                              |
| 8%            | 88,51   | 71,27   | 82,88                                              |
| 9%            | 83,40   | 66,79   | 75,82                                              |
|               |         |         | Valeur de l'obligation associée aux différents YTM |

$\rightarrow$  plus le prix est bas, plus le YTM est élevé.

$$t = 1 \cdot 8 \cdot 6\% (1 + 2\%)^{-t} + 100 (1 + 2\%)^{-8} = 129,3$$



C semble être plus sensible aux changements YTM que B & A

C diminue plus rapidement pour un changement donné du YTM, nous voyons une plus grande variation de la valeur de C que A & B.

Le prix de B est toujours inférieur au prix de A car A paie un meilleur coupon donc les flux de trésorerie attendus sont plus élevés.

### 3. La sensibilité $(dP/P)/dr$

$\rightarrow$  variation relative du prix d'une obligation par rapport à la variation de YTM en%

On compare un changement de prix ( $dP$ ) à un changement de ratio ( $dr$ )  $\rightarrow$  on compare un % à un autre %.

| Sensitivity   | Bond A | Bond B | Bond C |
|---------------|--------|--------|--------|
| From 4% to 5% | -6*    | -7     | -10    |
| From 8% to 9% | -5,8   | -6     | -9     |

C est l'obligation la plus sensible et B est plus sensible que A.

$$* -6 \approx ((106.46 - 113.47)/113.47)/0.01$$

- On observe que + l'obligation est sensible,

- plus sa maturité est élevée,
- plus son taux nominal est bas.

- NB: en pratique, des valeurs absolues sont considérées.

on oublie le - (moins) car on sait que  $dP / dr$  donnera toujours un nombre négatif.  
Aucune preuve de la sensibilité de C, juste une observation.

### 3. Duration

Multiplier la sensibilité par  $-(1+r)$  donne  $-(1+r) (dP / P) / dr$  qui peut être montré égal à:

$$D = \sum_{t=1}^N \left[ \frac{t \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^N \frac{F_t}{(1+r)^t}} \right]$$

La duration est la moyenne pondérée des échéances de remboursement des obligations. Les pondérations correspondent à la part de chaque gain (actualisé) dans la valeur totale de

$$D = \sum_{t=1}^N \left[ \frac{t \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^N \frac{F_t}{(1+r)^t}} \right] = \sum_{t=1}^N \left[ \frac{t \frac{F_t}{(1+r)^t}}{P} \right]$$

$$= 1. \frac{\frac{F_1}{(1+r)}}{P} + 2. \frac{\frac{F_2}{(1+r)^2}}{P} + 3. \frac{\frac{F_3}{(1+r)^3}}{P} + \dots + N. \frac{\frac{F_N}{(1+r)^N}}{P}$$

l'obligation.

- + la durée de l'obligation est longue ...
- ... plus le taux du coupon est bas,
- ... plus la maturité est grande

Plus la maturité d'une obligation est longue, plus elle est risquée

La durée (=duration) est une moyenne de la maturité

#### • Illustration

Considérons un YTM initial de 5%

$$D_A = \frac{1}{P_A} \left[ 1 \cdot \frac{6}{(1+5\%)^1} + 2 \cdot \frac{6}{(1+5\%)^2} + \dots + 8 \cdot \frac{106}{(1+5\%)^8} \right] = 6,63$$

$$D_B = \frac{1}{P_B} \left[ 1 \cdot \frac{3}{(1+5\%)^1} + 2 \cdot \frac{3}{(1+5\%)^2} + \dots + 8 \cdot \frac{103}{(1+5\%)^8} \right] = 7,16$$

$$D_C = \frac{1}{P_C} \left[ 1 \cdot \frac{6}{(1+5\%)^1} + 2 \cdot \frac{6}{(1+5\%)^2} + \dots + 15 \cdot \frac{106}{(1+5\%)^{15}} \right] = 10,54$$

3 obligations

D est en années  $\rightarrow D_A = 6,63$  ans

- La durée est une approximation linéaire du risque  
= si on transforme la formule de D, on voit que si on a d, r et P on peut trouver D. c'est une relation linéaire (=proportionnel) entre dr et dP/P

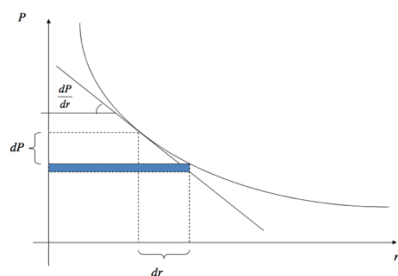
- La durée donne une approximation linéaire du taux d'intérêt  
le risque d'une obligation, c'est-à-dire des variations de prix imprévues.

$$D = -(1+r) \frac{\frac{dP}{dr}}{P}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = - \frac{D}{(1+r)} dr$$

- Pour P et D donnés (fixes), la relation entre dr et dP / P est linéaire (proportionnelle).

La sensibilité est majeure. Transformer la définition de la sensibilité conduit à la durée.



La relation entre P & r est une droite et non une courbe.

$r = \text{YTM}$  et  $P = \text{prix de l'obligation}$

$\rightarrow$  c une droite donc une relation linéaire. C une dérivée.

Dérivé= moyen de comparer des variations

Cette relation linéaire est-elle problématique?

- Les mesures de risque sont plus utiles lorsque le niveau de l'incertitude est la plus élevée.
- Cependant, les approximations linéaires peuvent sous-estimer le niveau de risque, càd les variations de prix de l'obligation.

- Les mesures de risque les plus courantes utilisées en finance reposent en effet sur des relations linéaires entre les prix et les facteurs de risque.

High potential risk : si on utilise mesures de risque linéaires c'est dangereux car c'est une approximation : ça peut entraîner des situations risquées & des erreurs quand y a une augmentation subite de l'obligation par ex.

– Cependant, les avantages de cette hypothèse sont :

- calcul simple .
- Agrégation: la duration d'un portefeuille d'obligations est la moyenne pondérée des durées individuelles des obligations.

La relation linéaire n'est pas parfaite mais est facile d'utilisation. Ça biaise les résultats.

#### 4. Immunization.

être protégé (=to be immunized)

Le détenteur d'une obligation (ou d'un portefeuille d'obligations) qui fixe son horizon d'investissement à la duration de l'obligation (ou du portefeuille) est immunisé contre le risque de taux d'intérêt (=interest rate risk).

Quand on achète une action on est exposé au risqué que son prix varie après. Ce risqué c'est le taux d'intérêt.

– introduction : VAN et investissement de coupon

Supposons qu'un détenteur d'obligations ait la possibilité de réinvestir les flux de trésorerie intermédiaires (coupons) à un rendement identique au YTM de l'obligation

Si on garde le coupon ds son compte on prend un risqué (le coût d'opportunité) → on peut investir un coupon au même YTM du jour.

$$V_N = \sum_{t=1}^N NV.i(1+r)^{N-t} + NV$$

La valeur terminale de l'investissement est alors:

Actualiser (=discounting) cette expression au YTM de l'obligation donne enfin :

$$V_0 = \sum_{t=1}^N \frac{NV.i}{(1+r)^t} + \frac{NV}{(1+r)^N} = P$$

NV = valeur nominale = nominal value

NV x I = coupon → chaque coupon est investi à un taux r durant N-1 périodes

si un coupon a une maturité de 5ans, on le réinvestit car on a pas besoin d'argent sur le moment → on peut réinvestir le coupon pdt 4ans (N-1 = 5-1 =4)

- Ainsi, la tarification d'une obligation suppose implicitement que les coupons peuvent être réinvestis au YTM  $r$  de l'obligation, ce qui n'est pas accordé.

- À un moment arbitraire, une augmentation du YTM a deux effets opposés:

- Une augmentation de la valeur terminale de l'investissement: les cash-flows intermédiaires sont réinvestis avec un rendement supérieur (=higher return).
- le taux d'intérêt augmente donc il y a une diminution de la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs.

→ On peut montrer que les deux effets se compensent parfaitement si l'horizon de planification est la durée initiale de l'obligation.

3<sup>ème</sup> coupon :  $7,1625 = 6 (1 + 5\%)^{3,63} \rightarrow$  je réinvestis le 3<sup>ème</sup> coupon.  
 - Ap Entre 6 & 7ans, on atteint notre horizon mais on reçoit cash-flows quand même, 6,63 est passé.

Coupon en date 7 :  $\frac{6}{(1+5\%)^{0,37}} = 5,8927.$  0,37 car  $6 - 6,63$

Maturité : 1an

Dans 1an je reçois 6euros

Là, YTM = 5%, après 1an je reçois un coupon de 6euros dont g pas besoin. Je le réinvestis à 5%. 1n est passé et l'horizon d'invest à  $t=0$  est de 6,63. On a passé 1an. Donc là il reste 5,63 ans. On fait ça à chaque période qu'on reçoit un coupon jusqu'à 6,63 ans où j'aurai besoin d'argent.

| Dates                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8        | Sum at t=6,63 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|---------------|
| Cash-flows (nominal) | 6      | 6      | 6      | 6      | 6      | 6      | 6      | 106      |               |
| DV or CV at 5%       | 7.8967 | 7.4476 | 7.1625 | 6.8215 | 6.4966 | 6.1873 | 5.8927 | 99.1463  | 147.16        |
| DV or CV at 6%       | 8.3296 | 7.8581 | 7.4133 | 6.9937 | 6.5978 | 6.2243 | 5.8720 | 97.8671  | 147.16        |
| DV or CV at 4%       | 7.4825 | 7.1947 | 6.9180 | 6.6519 | 6.3961 | 6.1501 | 5.9136 | 100.4546 | 147.16        |

Taux : 6%

YTM = 4%. On a moins de cash flows mais à 6,63 on applique un discount rate + petit donc on a + grandes valeurs cò 5,6 → à la fin 147,16

Pour 6% : à 6,63% on a pas assez d'argent donc on vend l'action à la valeur actualisée (=discounted value) : on liquide notre investissement. à  $t = 6,63$  j'ai 147,16euros : c'est la **valeur terminale**

- Ce principe peut être appliqué à un investisseur individuel. Cependant, cela a aussi du sens au niveau du bilan (=balance sheet) d'une institution financière. En effet, en faisant correspondre (dans la mesure du possible) la durée de ses actifs (=assets) à la durée de ses passifs (=liabilities), une institution financière minimise son exposition au risque de taux d'intérêt.

Cela suggère une gestion dynamique des actifs, la durée d'un actif étant une fonction décroissante du temps.

La durée d'une obligation diminue avec le temps → faudrait rebalancer son portefeuille (=portfolio) régulièrement pr garder la même durée (c'est l'idée des banques). Idée : garder l'immunization.

#### D. Types d'obligations spécifiques (=Specific bond types)

## 1. Obligations à taux variables = Floating rate notes (FRN)

Si j'achète ajd une FRN je sais que le prochain coupon sera euribor ibor... + un % que je ne connais pas encore aujourd'hui car il est flottant.

= le taux nominal d'un FRN varie en fonction de certains taux de référence externes (typiquement Euribor, Libor, Eonia ... plus un spread fixe).

Euribor, eonia... = segment du marché financier où les banques empruntent & prêtent entre elles à CT.

Le taux de ce marché = **interbank market ranks**

Euro inter bank offered rate = euribor

London interbank rank = libor

Euro overnight index average = eonia

Maturité : max 12mois

Moyenne = 3mois

Ça peut être sur 1jour, 1semaine..

– Motivations pour investir / émettre des FRNs :

- i. **Spéculation**: un emprunteur anticipant une baisse des taux d'intérêt futurs préférerait émettre un FRN (l'inverse est vrai pour un prêteur). = on anticipe une baisse du taux d'intérêt dans le futur pour l'emprunteur. Le prêteur espère hausse du taux.
- ii. **Couverture financière** : une banque dont le coût des fonds est flottant peut préférer investir / prêter à taux variable → stabilisation de la marge d'intermédiation. = ça facilite la stabilisation de la marge intermédiaire. (marge d'intermédiation = intérêt payé - intérêt ..)
- iii. **Compromis capital / revenu**: le détenteur d'un FRN est exposé à l'incertitude des coupons tandis que le détenteur d'une obligation à taux fixe est exposé à l'incertitude de la valeur de l'obligation.

Si YTM = taux nominal, la valeur de l'obligation = valeur nominale de l'obligation.

Corollaire: si la valeur nominale est ajustée en continu au YTM, la valeur de la liaison est constante.

En pratique, plus la valeur nominale est corrélée au YTM, moins la valeur de l'obligation fluctue, mais les coupons deviennent plus risqués.

## 2. obligations indexes (=Indexed bonds)

En général, la valeur de remboursement d'une obligation correspond à sa valeur nominale.

Si l'inflation est élevée, le détenteur d'une obligation est remboursé avec de l'argent déprécié. L'effet est d'autant plus important que l'échéance du prêt est longue.

- Pour protéger les investisseurs, les obligations indexées sur l'inflation ont une valeur de remboursement (payée in fine) ajustée au niveau d'inflation réalisé. C'est une protection contre l'inflation. Idée : être attractif auprès des investisseurs.

De nombreuses autres clauses d'indexation. Par exemple: l'indice boursier (S&P 500, CAC 40 ...) → rend les obligations similaires à l'investissement en actions. Réputé pour accroître l'attractivité des obligations en période de marchés boursiers haussiers (=stock markets). Si bullish (=haussier) → mauvaise nouvelle pour l'émetteur.

- Obligations à impact social (=social impact bonds). Les clauses d'indexation ne doivent pas nécessairement être basées sur des indicateurs financiers / économiques. Les coupons d'une obligation à impact social sont fondés sur le succès de certaines politiques publiques.

Illustration: le suivi des jeunes délinquants incarcérés à la prison de Ryker's Island (NY).

Plus le taux de réadmission est élevé, plus le coupon est élevé

Idée : baisser délinquance va baisser coûts publics donc pourquoi pas investir dans cette diminution.

### 3. Zero-coupons

C'est une vraie sécurité les 0 coupons

- Pourquoi émettre ou investir dans des ZC?

Émetteur: pas de paiement d'intérêts. Non *in-btw* paiement mais un gros paiement au moment où on veut l'argent. Cependant, le coût financier de l'émission est intégré dans le remboursement in fine (=bullet) → retarder le coût financier de l'émission.

Investisseur: supprimer le problème du réinvestissement des paiements intermédiaires. Attractif pour les investisseurs institutionnels confrontés à des sorties importantes connues à l'avance: fonds de pension, fonds de retraite ...

Le gouvernement allemand émet beaucoup de ZC.

Le ZC peut être émis directement par les emprunteurs. Cependant, pour faire face à la demande, il est possible de créer des ZC à partir d'obligations existantes: stripping obligataire (=bond stripping) (= revendre certains coupons et conserver le coupon 0). On négocie séparément les flux de trésorerie (coupons ou rachat final).

Le principal avantage du stripping des obligations est la possibilité d'échanger toutes les dates de paiement existantes disponibles à partir des obligations existantes.

- Le démembrement des obligations est réversible: le détenteur de toutes les bandes d'une obligation peut à nouveau négocier l'obligation dans son ensemble.

Stripping = démembrement

Remembrement = on achète l'obligation pour créer ZC.

#### 4. les obligations convertibles (=Convertible bonds)

- Le détenteur d'une obligation convertible a la possibilité d'échanger son obligation contre une quantité fixe ex ante d'actions de l'émetteur.

– avantages des obligations convertibles :

- Investisseur: obtenez des revenus fixes (coupons) et pariez sur l'augmentation du stock de l'émetteur.
- Émetteur: baisse des paiements des coupons et, en cas de conversion, pas de remboursement des obligations.

| 08/23/2016                                                                                                    | 04/15/2017                                                                   | 07/01/2018                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| - Stock price: 50<br>- Issue price of the convertible: 80<br>- Conversion ratio 1:1<br>- Maturity: 08/23/2019 | - Stock price: 70<br>- Price of the bond: 90<br><br>No incentive to exchange | - Stock price: 120<br>- Price of the bond: 85<br><br>Incentive to exchange |

- bcp utilisé par les start-up

– Valorisation des obligations convertibles: valeur d'une obligation «vanille»  
+ la valeur d'une option d'échange.

- Par défaut, les actions livrées lors de l'échange des obligations sont des actions nouvellement émises. Ainsi, l'émission d'une obligation convertible est combinée à un programme d'augmentation de capital (=a capital increase program).

Cela implique un risque de dilution pour les actionnaires (=shareholders) existants qui ne participent pas à l'émission d'obligations convertibles.

- Possibilité d'émettre des obligations convertibles en actions nouvelles ou existantes (OCEANE): pour chaque obligation échangée, l'émetteur choisit soit de livrer de nouvelles actions, soit d'acheter des actions existantes.

#### -Illustration :

Alcatel-Lucent a lancé une offre d'obligations convertibles en et / ou échangeables contre des actions nouvelles et / ou existantes (les «Obligations») en deux tranches:

- la première tranche d'un montant nominal initial d'environ 625,8 millions d'euros à échéance 30 janvier 2019 (les «Obligations 2019»); et
- la deuxième tranche d'un montant nominal initial d'environ 418,4 millions d'euros à échéance 30 janvier 2020 (les «Obligations 2020»).

La valeur nominale par obligation 2019 a été fixée à 4,11 EUR et la valeur nominale par Obligation 2020 a été fixée à 4,02 EUR, soit une prime d'environ 40% pour les obligations

2019 et d'environ 37% pour les obligations 2020, sur le cours de référence de l'action Alcatel-Lucent sur le marché réglementé Euronext Paris. [...]

Les Obligations 2019 seront émises au pair le 10 juin [...]. Le rapport de conversion / d'échange de chaque Obligation sera d'une action Alcatel-Lucent nouvelle ou existante par Obligation, sous réserve d'ajustements potentiels.  
[...]

## 5. Mandatory bonds

- Cautionnement avec remboursement in fine (=bullet) non monétaire. L'obligation est remboursée en actions (pas nécessairement en actions de l'émetteur).

Aucune option.

- En analyse financière, la question d'un mandataire est assimilée à une augmentation des capitaux propres (=equity).

– Quelle utilité ?

- Vente à terme d'actions.
- Fonds d'annulation (=reversal funds): investir des fonds dans une entreprise en défaut (=defaulted firm) avec une protection relative pour l'investisseur.

– Étude de cas 1: Volkswagen (October 2015)

Volkswagen AG a une obligation de 3,7 milliards d'euros (4,2 milliards de dollars) venant à échéance en Novembre.

Les détenteurs des titres dus le 9 novembre seront payés en actions VW au lieu d'espèces car les titres doivent être convertis en capitaux propres.

Les investisseurs peuvent recevoir des actifs d'une valeur inférieure au coût initial des obligations.

«[...] Les obligations convertibles, qui ont été émises en 2012, ont été cotées à 73 cents sur l'euro jeudi, contre 100,8 cents le 17 septembre, un jour avant que le scandale n'éclate, selon les données compilées par Bloomberg. »

– Étude de cas 2 : l'émission d'une obligation échangeable obligatoire par Lagardère SCA portant sur 7,5% du capital d'EADS.

Émission d'une obligation échangeable par Lagardère SCA [...] remboursable contre des actions représentant jusqu'à 7,5% du capital d'EADS. L'émission a été entièrement souscrite par IXIS CIB, qui à son tour a vendu à terme une grande majorité des actions sous-jacentes d'EADS à un groupe d'investisseurs institutionnels français. [...]

Aux termes de l'émission obligataire (=the bond issue), Lagardère SCA est en droit de bénéficier pleinement de toute hausse du cours de l'action EADS jusqu'à un maximum de 115% du cours de référence. Cependant, en cas de baisse du cours de l'action EADS, Lagardère SCA se voit garantir une vente au prix de référence. Le mécanisme d'exposition à

la hausse peut entraîner une diminution du nombre d'actions livrées lors du remboursement de l'émission obligataire.

#### 6. Bonds with warrants.

- Obligation *vanille* avec prime: un garant qui donne la possibilité de participer à une future augmentation de capital à des conditions avantageuses.

- En général, les BWW sont détachables et peuvent être échangés séparément.

Les BWW sont censés augmenter l'attractivité des obligations.

#### 7. Fungible bonds

– Coupons une obligation en plusieurs parties. Après l'émission échelonnée, les obligations sont indiscernables.

- Le prix d'émission des obligations émises plus tard est le prix actuel des obligations émises précédemment.

- Utilité: émettre de gros montants sans courir le risque d'une demande insuffisante.

Glossary :

- Redemption value: valeur de remboursement
- Bond: obligation
- Convertible: obligation convertible
- Yield-to-maturity: rendement actuariel
- Coupon footer: pied de coupon
- Warrant: bon de souscription
- Duration: durée (peu utilisé)
- Floating rate note: obligation à taux variable
- Fungible bond: obligation assimilable
- Internal rate of return: taux de rendement interne
- Mandatory: obligation remboursable en actions
- Net Present Value: valeur actuelle nette

Nominal value: valeur nominale

Nominal rate: taux nominal/facial

- Illustration

Paris, le 23 novembre 2006 – Pernod Ricard annonce le 23 novembre 2006 le lancement de son premier emprunt obligataire d'un montant total de 850 millions d'Euros en 2 tranches avec les caractéristiques suivantes :

| Tranche 1 : 300m EUR FRN Juin 2011                     | Tranche 2 : 550m EUR 4.625% Décembre 2013                      |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Montant : EUR 300 millions                             | Montant : EUR 550 millions                                     |
| Maturité : 4 ans et demi                               | Maturité : 7 ans                                               |
| Echéance : 6 juin 2011                                 | Echéance : 6 décembre 2013                                     |
| Règlement : 6 décembre 2006                            | Règlement : 6 décembre 2006                                    |
| Format : Taux Flottant / FRN                           | Format : Taux fixe                                             |
| Coupon : Euribor 3 mois + 50 bp                        | Coupon : 4.625 %                                               |
| Prix au reoffer : 99.876                               | Prix au reoffer : 99.526                                       |
| Marge au reoffer : 53 bp au-dessus de l'Euribor 3 mois | Marge au reoffer : 80bp au dessus du taux fixe de swap à 7 ans |

La dette senior à long terme de Pernod Ricard est notée BB+ par Standard & Poor's et Baa3 par Moody's.

Dans l'exemple précédent, le taux nominal est positif, mais le YTM à l'émission est négatif. Pour les obligations, le taux nominal est en pratique au moins nul (ZC).

Cependant, pour certaines opérations de financement, le taux d'intérêt apparent est négatif. Comment est-ce possible?

|                                | BTF<br>3 mois | BTF<br>6 mois | BTF<br>12 mois |  |
|--------------------------------|---------------|---------------|----------------|--|
| <b>Date d'adjudication</b>     | 01/08/2016    | 01/08/2016    | 01/08/2016     |  |
| <b>Ligne</b>                   | 13 semaines   | 20 semaines   | 50 semaines    |  |
| <b>Date de règlement</b>       | 03/08/2016    | 03/08/2016    | 03/08/2016     |  |
| <b>Echéance</b>                | 03/11/2016    | 21/12/2016    | 19/07/2017     |  |
| <b>Volume adjugé*</b>          | 3 394         | 888           | 710            |  |
| <b>ONC après adjudication*</b> | 86            | 32            | 33             |  |
| <b>Volume total émis*</b>      | 3 480         | 920           | 743            |  |
| <b>Taux moyen pondéré</b>      | -0,570%       | -0,556%       | -0,560%        |  |

– les Bons du Trésor Français (=BTF) sont des titres (=securities) à court terme ne comportant que deux paiements, comme un ZC : l'investisseur paie le prix à l'émission, l'Etat français rembourse le BTF à l'échéance.

Dans un BTF, le montant nominal est la valeur de remboursement, càd que les intérêts sont actualisés.

– Pour les 3 mois BTF, on a :

$$1001,43 \times \left( 1 + (-0.57\%) \times \frac{3}{12} \right) = 1000$$

– Les investisseurs acceptent de payer 1001,43 € aujourd'hui pour obtenir 1000 € 3 mois plus tard → taux d'intérêt implicite négatif.

## CHAPITRE 2 : Prise de décision sous risque: fondements théoriques (livre finance d'entreprise, chapitre 3 section 6)

### • Risque et incertitude (Keynes, Knight, 1921) :

- **Risque**: situation où des décisions doivent être prises en connaissant tous les états possibles du monde (conséquences) et leurs probabilités d'occurrence. En termes techniques, la distribution de probabilité du résultat d'une décision est connue. Exemple: une loterie.

- **Incertitude**: situation dans laquelle certaines conséquences peuvent ne pas être connues et les probabilités inconnues. Exemple: une catastrophe nucléaire.

Dans la «vraie vie», la plupart des situations correspondent à *l'incertitude*. Cependant, les statistiques peuvent aider à se rapprocher du risque (par exemple, les actuaires collectent des données sur la fréquence des catastrophes naturelles et leurs coûts).

- En finance, les modèles les plus courants sont construits sous risque.

### • Les antécédents du décideur :

- Les agents sont préoccupés par le niveau de leur richesse finale,  $w_f$

Cependant, à une date antérieure (notée 0), les agents détiennent une richesse initiale connue  $w_0$  (dotation initiale) et un actif risqué  $\tilde{x}$ . Ainsi, au temps 0, la richesse finale est inconnue, c'est-à-dire risquée:

$$\tilde{w}_f = w_0 + \tilde{x} \quad (1)$$

L'équation (1) prend une forme additive. Une forme multiplicative est équivalente:

$$\tilde{w}_f = w_0(1 + \tilde{x}) = w_0 + w_0\tilde{x} = w_0 + \tilde{y}$$

Hypothèse:  $\tilde{x}$  est une variable aléatoire, c'est-à-dire que sa distribution est connue → risque.

Le problème: un décideur (l'investisseur) doit faire un choix entre quelques (au moins deux) alternatives, parmi lesquelles au moins une est risquée.

- C'est un problème de longue date en économie:

- De nombreux déterminants: psychologie, culture, capacités cognitives ...
- Les humains sont hétérogènes: pas de théorie «unificatrice» de la prise de décision sous risque.

Une application concrète: **les questionnaires MIFID**

- Les directives sur les marchés d'instruments financiers exigent que les intermédiaires financiers évaluent l'attitude face au risque des clients (particuliers et entreprises) avant de vendre des produits financiers comportant des risques.
- Illustration :

#### A. Mesure 1: espérance mathématique (Huygens, 1657).

Le décideur évalue (= attribue une valeur  $V$ ) chaque alternative du choix en calculant son résultat attendu pondéré:

$$V(\tilde{w}_f) = E[\tilde{w}_f] = \sum_{i=1}^n p_i w_i$$

Avec :

$p_i$  = probabilité d'observer l'état du monde  $i$

$w_i$  = résultat de l'état du monde  $i$

Règle de décision: sélectionnez l'alternative avec le résultat attendu le plus élevé.

Limitation évidente: ne prend pas en compte la dispersion des résultats.

Deux alternatives avec des attentes égales deviennent indiscernables, même si les résultats de l'une sont beaucoup plus dispersés.

#### B. Mesure 2: espérance-variance (risque-rendement)

La valeur (subjective) que l'investisseur accorde aux alternatives est fonction à la fois de l'espérance mathématique et de la variance.

- La variance est la mesure du risque la plus courante:

$$Var[\tilde{w}_f] = \sigma_{\tilde{w}_f}^2 = \sum_{i=1}^n p_i (w_i - E[\tilde{w}_f])^2$$

$$V(\tilde{w}_f) = f(E[\tilde{w}_f], \sigma_{\tilde{w}_f}^2)$$

Donc on a :

Pas de forme a priori de  $f$ . Néanmoins, quelques propriétés minimales:

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial E[\tilde{w}_f]} > 0$$

i. : toutes choses étant égales par ailleurs, les agents préfèrent alternatives avec un résultat attendu plus grand.

- ii. Concernant la variance, il y a trois possibilités:

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \sigma_{\tilde{w}_f}^2} = 0, < 0, > 0$$

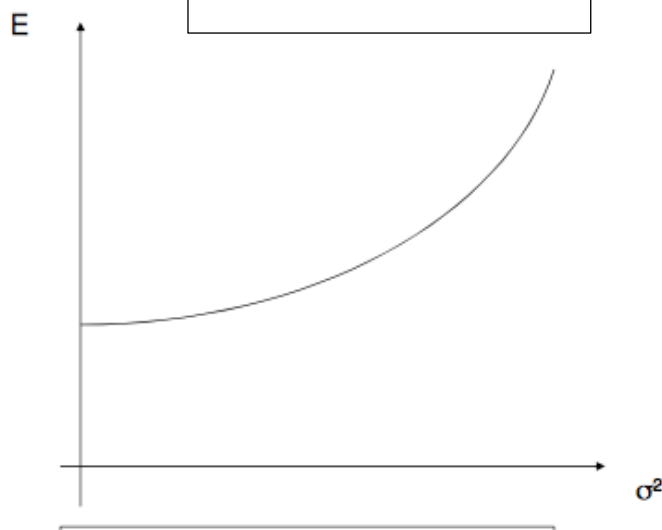
1. Dérivé **nulle**: la variance n'a aucun effet sur la valorisation = **neutralité** du risque.
2. Dérivée **négative** : avec une attente fixe, une variance plus élevée diminue la valeur d'une alternative = **l'aversion** au risque. C'est l'hypothèse la plus commune en finance.
3. Dérivée **positive**: avec une espérance mathématique fixe, une variance plus élevée augmente la valeur d'une alternative = **préférence au risque**.

Remarques :

- Situation la plus courante: l'aversion au risque.
- L'aversion au risque ne signifie pas que les gens ne veulent pas prendre de risque. Ils n'acceptent plus de risque que s'il est compensé par une augmentation des attentes, afin de maintenir la valeur au moins inchangée. Cette idée peut être formalisée:

$$dV(\tilde{w}_f) = \frac{\partial f}{\partial E[\tilde{w}_f]} dE[\tilde{w}_f] + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\tilde{w}_f}^2} d\sigma_{\tilde{w}_f}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE[\tilde{w}_f]}{d\sigma_{\tilde{w}_f}^2} = \frac{\partial f / \partial \sigma_{\tilde{w}_f}^2}{\partial f / \partial E[\tilde{w}_f]} \quad \text{aversion}$$



### C. Mesure 3: utilité attendue.

-Un peu d'histoire: le **paradoxe de Saint-Pétersbourg** :

- Vous avez la possibilité de participer à une variante du jeu «heads and tails»: si la queue sort pour la première fois au n-ième lancer, vous gagnez  $2n$  euros et le jeu s'arrête. Cependant, vous devez payer pour jouer à ce jeu.

Combien êtes-vous prêt à payer (càd quelle est votre disposition à payer)?

- La plupart des gens acceptent de payer un montant limité pour participer (environ 10-15 euros).

Cependant, le résultat attendu du jeu est infini : paradoxe!

Calcul du gain attendu :

| Outcome : tail... | $x$   | $p(x)$  | $xp(x)$  |
|-------------------|-------|---------|----------|
| ... at 1st throw  | 2     | 1/2     | 1        |
| ... at 2d throw   | 4     | 1/4     | 1        |
| ... at 3d throw   | 8     | 1/8     | 1        |
| ... at n-th throw | $2^n$ | $1/2^n$ | 1        |
| Total             |       |         | $\infty$ |

- Intuition du résultat: l'incommensurabilité des gains monétaires est contre-intuitive pour la plupart des gens.

- Première solution théorique: Daniel Bernoulli, en 1738. Idée: les gens ne tiennent pas compte des montants monétaires dans la prise de décision, mais des transformations subjectives des montants, par exemple:

| Objective           | Subjective                |
|---------------------|---------------------------|
| 1067573,32 €        | A lot of money            |
| 2M€ is twice as 1M€ | 2M€ is much more than 1M€ |

- Formellement: Bernoulli suppose que la fonction logarithmique reflète la transformation subjective des gains monétaires:

- Des montants + élevés ont une valeur subjective plus élevée.
- À mesure que les gains monétaires augmentent, les augmentations de la valeur subjective diminuent.

→ Le logarithme est une fonction concave croissante.

| Outcome : tail... | $\ln(x)$   | $p(x)$  | $xp(x)$          |
|-------------------|------------|---------|------------------|
| ... at 1st throw  | $\ln(2)$   | 1/2     | $1/2 \ln(2)$     |
| ... at 2d throw   | $\ln(4)$   | 1/4     | $1/4 \ln(4)$     |
| ... at 3d throw   | $\ln(8)$   | 1/8     | $1/8 \ln(8)$     |
| ... at n-th throw | $\ln(2^n)$ | $1/2^n$ | $1/2^n \ln(2^n)$ |
| Total             |            |         | $2\ln(2)$        |

$$V(\tilde{w}_f) = E[U(w_0 + \tilde{x})] = \sum_i p_i U(w_0 + x_i)$$

Donc :

L'utilité attendue (=expected utility) a été théorisée par Von Neumann et Morgenstern en 1947. Beaucoup d'autres fonctions pour décrire l'utilité que  $\ln$ .

- Principale faiblesse: de nombreuses recherches empiriques (expérimentales) montrent que de nombreuses personnes ne se comportent pas comme prévu par la théorie de l'UE.

Alternatives:

- Choix sous incertitude (et non risque)
- Étendre l'UE: les gens ne modifient pas seulement les résultats mais aussi les probabilités  
→ Théorie des perspectives, théories de l'utilité non attendue ...

Malgré un solide soutien empirique au niveau individuel, les théories alternatives n'ont jusqu'à présent pas réussi à fournir un cadre simple de coordination du marché et de tarification des actifs, c'est-à-dire qu'elles sont incapables (jusqu'à présent) de décrire les agrégation de décisions individuelles et découverte des prix.

- Équivalent de certitude :

quel est le montant de la richesse sans risque ( $w^*$ ) avec le même niveau d'utilité attendu que la richesse initiale formée par la dotation initiale (=initial endowment)  $w_0$  et l'actif risqué  $\tilde{x}$ ?

- Formellement:

$$U(w^*) = E[U(w_0 + \tilde{x})] \quad (2)$$

-Illustration :

Un agent a une dotation initiale de 1000. Détient également une loterie: gain / perte de 200 avec des probabilités égales (50/50). La fonction utilitaire est  $\ln(x)$ .

$$\begin{aligned} E[U(\tilde{x})] &= \frac{1}{2} \ln(800) + \frac{1}{2} \ln(1200) \cong 6,89 \\ \Rightarrow 6,89 &= \ln(w^*) \Leftrightarrow w^* = \exp(6,89) \cong 979,8 \end{aligned}$$

- Prix de vente du risque :

- Le prix de vente  $p_s$  d'un risque est la variation des liquidités après qu'un agent a vendu le risque à une contrepartie.

Formellement,  $p_s$  est la solution de l'équation :

$$U(w_0 + p_s) = E[U(w_0 + \tilde{x})] \quad (3)$$

- Remarques:

- En vendant son risque, l'agent se tourne vers la certitude → aucune attente du côté gauche.
- En regardant les équations (2) et (3):

$$U(p_s + w_0) = U(w^*) \Leftrightarrow p_s = w^* - w_0$$

Dans l'exemple précédent, ça nous donne  $p_s = -20,2$  donc un prix négatif

#### D. Introduction aux choix de portefeuilles

Supposons qu'un investisseur détient une dotation initiale  $w_0$ . Deux instruments financiers (non exclusifs) sont à sa disposition:

- Un actif sans risque (une obligation ZC avec YTM  $i$ ). Indiquez  $m$  le montant investi dans l'actif sans risque.
- Un actif risqué, dont le % de rendement est une variable aléatoire  $\tilde{x}$ . Le montant investi dans l'actif risqué est noté  $a$ .

- Objectif de l'investisseur: maximiser l'utilité attendue de sa richesse finale risquée définie comme:

$$\tilde{w}_f = m(1 + i) + a(1 + \tilde{x})$$

sous la contrainte :  $w_0 = m + a$

$U$  est la fonction d'utilité qui augmente ( $U' > 0$ ) et est concave ( $U'' < 0$ ) → aversion au risque.

La contrainte budgétaire peut être réécrite ainsi :

$$\tilde{w}_f = w_0(1 + i) + a(\tilde{x} - i)$$

Donc l'investisseur résout le programme suivant :

$$\max_a E[U(\tilde{w}_f)] = \max_a E[U(w_0(1 + i) + a(\tilde{x} - i))]$$

Avec les conditions d'optimalité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(U)}{\partial a} &= E[U'(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)] = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial^2 E(U)}{\partial a^2} &= E[U''(\tilde{w}_f)(\tilde{x} - i)^2] < 0 \end{aligned}$$

La condition (4) peut être réécrite ainsi :

$$E[U'(\tilde{w}_f)\tilde{x}] = E[U'(\tilde{w}_f)]i$$

En utilisant la définition de la covariance (\*)  $cov(x; y) = E[xy] - E[x]E[y]$  et en définissant  $\mu$  le rendement attendu de l'actif risqué, on obtient:

$$\mu E[U'(\tilde{w}_f)] + cov(U'(\tilde{w}_f), \tilde{x}) = iE[U'(\tilde{w}_f)]$$

Sachant que l'utilité marginale est strictement positive, si on divise la précédente équation

par  $E[U'(\tilde{w}_f)]$ , on a :

$$\mu + \frac{cov(U'(\tilde{w}_f), \tilde{x})}{E[U'(\tilde{w}_f)]} = i$$

Finalement, ça donne :

$$\mu = i + \left[ -\frac{cov(U'(\tilde{w}_f), \tilde{x})}{E[U'(\tilde{w}_f)]} \right] \quad (5)$$

Le terme entre parenthèse est positif. En effet, le dénominateur est toujours positif. Le numérateur est négatif (+ le rendement d'un actif risqué est grand, + la richesse finale l'est et + l'utilité marginale est faible. → **covariance négative**).

Le ratio qu'on a ci-dessus calculé est précédé d'un signe négatif, le terme est, lui, positif.

Le terme entre parenthèses peut être interprété comme une **prime de risque**: le rendement attendu d'un actif risqué ( $\mu$ ) est la somme du rendement d'un actif sans risque ( $i$ ) et d'une majoration déterminée par le rendement aléatoire de l'actif risqué

La prime de risque est déterminée par la covariance du rendement des actifs risqués avec la richesse totale et pas seulement par la volatilité des actifs risqués.

La covariance / corrélation est un paramètre clé en finance, en particulier en gestion de portefeuille. Un actif financier est risqué car il a un lien étroit avec les conditions économiques générales.

Idée selon laquelle un actif a de la valeur pour un investisseur lorsqu'il a un paiement plus élevé quand la richesse totale est faible → *valeur de la contingence*.

Plus généralement, les investisseurs peuvent demander une prime de risque plus faible lorsque le rendement d'un actif est moins corrélé aux conditions économiques générales.

### Étude de cas : Est-ce que les actions sont plus risquées que les obligations ?

La majorité des investisseurs répond oui à cette question car le prix des obligations est moins volatile que le cours des actions.

La covariance du rendement d'un actif risqué avec le portefeuille représentatif de l'économie est déterminée par sa propre volatilité & sa corrélation avec ce portefeuille. En utilisant les précédentes notations, on a :

$$\text{Cov}(\tilde{x}, U'(\tilde{w}_f)) = \sigma_{\tilde{x}} \sigma_{U'(\tilde{w}_f)} \rho_{\tilde{x}/U'(\tilde{w}_f)}$$

- i. Les actions sont-elles plus volatiles que les obligations ?

La volatilité n'est pas stable dans le temps.

En général, les actions sont plus volatiles mais la différence est très instable et souvent faible.

Selon le prix Nobel en économie (2003) Robert Engle, mesurer la volatilité est un problème délicat. Il a reçu le prix Nobel pour avoir développé des modèles statistiques de mesure de la volatilité.

- ii. Les actions sont-elles plus/moins liées à l'état de l'économie que les obligations ?  
Il semble que les actions sont plus corrélées aux conditions générales de l'économie que les obligations.

Vix est un indice de volatilité construit à partir des *options prices* : c'est une mesure du risque des conditions générales de l'économie.

➔ Les actions sont plus risquées que les obligations mais pas à cause de leur plus forte volatilité.

L'équation 5 nous donne une théorie de la prime de risque demandée par un investisseur individuel.

En 1953, Arrow nous donne un cadre qui permet de calculer la prime de risque agrégée c-à-d à l'équilibre du marché sous aversion au risque & utilité espérée.

Mais ce résultat est limitée car ses fonctions d'utilité ne sont pas directement observables. Il y a eu un appel à la construction d'un modèle permettant le calcul de la prime de risque : *le modèle de tarification des actifs financiers* (CAPM)

## Chapitre 3 : gestion de portefeuille et valorisation des actions (chap 9-12 finance d'ese)

- La valeur d'une action est la valeur actualisée de ses flux de trésorerie attendus.
  - Quels cash-flows? Dividendes (si l'entreprise le décide) et prix de revente (=resale price) (si nous revendons l'action). S'il n'y a pas de revente, alors la valeur est la valeur actualisée des dividendes sur un horizon temporel non spécifié (infini)
    - le prix de revente est la valeur actualisée des dividendes attendus au moment de la revente.
  - Comment choisir un taux d'actualisation dans le processus de valorisation? Nous pouvons avoir une idée des flux de trésorerie attendus, mais nous n'avons aucune idée du taux d'actualisation à utiliser.
  - La théorie du portefeuille fournit un cadre pour déterminer le coût des capitaux propres (=cost of equity), c'est le taux d'actualisation que nous recherchons pour valoriser les actions.

- Introduction : formules

- Considérons le rendement d'un stock risqué comme une variable aléatoire avec une moyenne et une variance connues

$$r = r_{t,t-1} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \cong \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

- Le rendement est la variation relative des prix des actions entre  $t-1$  et  $t$ .

$a_i$  : part de la richesse investie dans l'actif  $i$  avec la somme des parts  $\sum_{i=1}^N a_i = 1$ , avec  $N$  actifs (univers d'investissement accessible à l'investisseur).

- Le rendement d'un portefeuille est la somme pondérée des rendements des actions

$$r_p = \sum_{i=1}^N a_i r_i$$

qui lui appartiennent.

→ Le rendement du portefeuille est la somme pondérée de plusieurs variables aléatoires.

Notations:

- $\bar{x}$  : une variable aléatoire
- $x_s$  : une réalisation de  $\bar{x}$  avec une probabilité  $p_s$  et  $s$  l'état du monde.
- $a$  and  $b$  : paramètres données (nombres)

**Résultat 1** : espérance (=expectation) d'une transformation affine (=linéaire) d'une variable aléatoire.

$$\begin{aligned}
E[a\tilde{x} + b] &= \sum_s p_s(ax_s + b) = \sum_s p_s ax_s + \sum_s p_s b \\
&= a \sum_s p_s x_s + b \sum_s p_s = aE[\tilde{x}] + b
\end{aligned}$$

$ax_s$ : Nous modifions le poids des actions dans le portefeuille  
 $\tilde{x}$  : retour risqué d'une action.

Si  $a$  est petit, on réduit risque de l'action dans le portefeuille. Si  $a$  est grand, on augmente le risque du stock dans le portefeuille.

$+b$  = on ajoute un actif non risqué (ZC) au portefeuille. On ajoute une constante là.

➔ on ajoute de l'espèce au portefeuille.

L'attente est la somme pondérée du résultat du monde  $s$ .

1<sup>er</sup> terme :  $(ax_s + b) \times p_s$  (sa probabilité). On le somme sur tous les états possibles du monde.

$$\begin{aligned}
E[a\tilde{x} + b] &= \sum_s p_s(ax_s + b) = \sum_s p_s ax_s + \sum_s p_s b \\
&= a \sum_s p_s x_s + b \sum_s p_s = aE[\tilde{x}] + b
\end{aligned}$$

on factorise  $b$  hors de la somme.

Résultat 2: espérance d'une somme de variables aléatoires.

$$\begin{aligned}
E[\tilde{x} + \tilde{y}] &= \sum_s p_s(x_s + y_s) = \sum_s p_s x_s + \sum_s p_s y_s \\
&= E[\tilde{x}] + E[\tilde{y}]
\end{aligned}$$

$x_s + y_s$  est la somme des résultats pour tous les états du monde. Nous pouvons faire deux somme. La 1<sup>ère</sup> est l'espérance de  $\tilde{x}$  et le second est l'espérance de  $\tilde{y}$ .

NB: la moyenne d'une somme dans la somme des moyennes.

Résultat 3 : variance d'une transformation affine d'une variable aléatoire

Nous construisons un portefeuille d'investissements risqués (=risky assets).

Construire un portefeuille, c'est ajouter des actifs risqués, modifier leurs quantités donc multiplier par  $a$  et éventuellement ajouter de la trésorerie ou des actifs sans risque sur ce portefeuille qui s'écrit ici en ajoutant la constante  $b$  au portefeuille.

Comme nous ne sommes pas seulement intéressés par le rendement attendu du portefeuille, mais aussi par sa volatilité, nous devons calculer la variance de  $ax + b$ .

Nous utilisons donc la définition de la variance. La variance est la somme des écart-types au carré = un résultat de  $ax + b$  est  $(ax_s + b)$  donc on prend la différence de l'espérance de  $ax + b$  et on le met au carré de la probabilité d'occurrence  $p_s$ .

1<sup>er</sup> term : on peut factoriser b hors de la parenthèse. → ça nous donne la deuxième ligne où on a enlevé b.

C la différence de deux variables au carrés.

$$\begin{aligned}
 Var[a\tilde{x} + b] &= \sum_s p_s(ax_s + b - E[a\tilde{x} + b])^2 \\
 &= \sum_s p_s(ax_s - E[a\tilde{x}])^2 \\
 &= \sum_s p_s(a^2x_s^2 - 2ax_sE[a\tilde{x}] + E[a\tilde{x}]^2) \\
 &= a^2 \sum_s p_s(x_s^2 - 2x_sE[\tilde{x}] + E[\tilde{x}]^2) = a^2 \sum_s p_s(x_s - E[\tilde{x}])^2 \\
 &= a^2 Var[\tilde{x}] \\
 &\Rightarrow \sigma_{a\tilde{x}+b} = a\sigma_{\tilde{x}}
 \end{aligned}$$

là c sous forme  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

on ôte a de la parenthèse

B, la constante disparaît du résultat car dans la définition de la variance on a  $b - b$

Résultat 4: variance d'une somme de variables aléatoires. En construisant des portefeuilles d'actions risquées, nous ajoutons des variables aléatoires.

$$\begin{aligned}
 Var[\tilde{x} + \tilde{y}] &= \sum_s p_s(x_s + y_s - E[\tilde{x} + \tilde{y}])^2 \\
 &= \sum_s p_s(x_s - E[\tilde{x}] + y_s - E[\tilde{y}])^2 \\
 &= \sum_s p_s((x_s - E[\tilde{x}])^2 + 2(x_s - E[\tilde{x}])(y_s - E[\tilde{y}]) + (y_s - E[\tilde{y}])^2) \\
 &= \sum_s p_s(x_s - E[\tilde{x}])^2 + \sum_s p_s(y_s - E[\tilde{y}])^2 + 2 \sum_s p_s(x_s - E[\tilde{x}])(y_s - E[\tilde{y}])
 \end{aligned}$$

$$= Var[\tilde{x}] + Var[\tilde{y}] + 2Cov(\tilde{x}; \tilde{y})$$

Si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  la covariance vont dans le même sens, la covariance est positive

Si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  vont dans des directions opposées, covariance est négative

Si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont totalement indé, la covariance = 0

si 2 variables vont dans le même sens, elles peuvent être + grandes que leur espérance.

Si c le cas  $(x_s - \tilde{x}) > 0$  et en même temps,  $y_s$  est + grand que ce qu'on espérait.

→  $(x_s - \tilde{x}) > 0$  et  $(y_s - \tilde{y}) > 0$

→ le produit va être positif.

Si ça se passe la majorité du temps, la somme va être positive.

2 variables vont dans des sens opposés, si  $x_s$  est + grand que son espérance,  $y_s$  est plus petit que son espérance qui est  $\tilde{y}$ . Donc  $(x_s - \tilde{x}) > 0$  et  $(y_s - \tilde{y}) < 0$

Si ça se passe la majorité du temps (=dans la plupart des pays), la covariance va être négative.

- La variance de la somme de deux (ou plus) variables aléatoires est déterminée par leurs variances individuelles et par leur tendance à se déplacer (ou non) ensemble

## 1. CAPM

### A. Rendement et risque d'un portefeuille de deux actifs.

Considérons deux actifs (=stocks = shares) avec un rendement (respectif)  $r_1, r_2$  et un risqué (volatilité)  $\sigma_1, \sigma_2$  où

$$E[r_2] > E[r_1] \text{ and } \sigma_2 > \sigma_1$$

Ces hypothèses reflètent l'aversion pour le risque (accepter un risque plus élevé si le rendement attendu est suffisamment élevé). On investit une part  $\alpha$  de la richesse initiale dans l'actif 1 et  $(1 - \alpha)$  dans l'actif 2.

- Si  $\alpha > 0$  je consacre une part positive de mon patrimoine à l'actif, j'ai une position longue sur l'actif (je le possède).
- Si  $\alpha < 0$  j'ai une position courte (vente à découvert, ou l'actif est emprunté -> passif).

• Une courte digression: la vente à découvert (=short selling)

— Les ventes à découvert vendent un actif qui n'est pas la propriété. Ca semble surprenant.

En pratique: on emprunte un actif (action, obligation) contre une garantie (espèces ou autre actif de bonne qualité) et on convient de restituer l'actif à une date ultérieure. Appelé un accord de mise en pension (= repo = repurchase agreement).

- Jusqu'à la date spécifiée à laquelle nous rendrons l'actif, le nouveau propriétaire (= l'emprunteur) peut faire ce qu'il veut, même vendre l'actif, mais: engagement de restituer l'actif → responsabilité (similaire à la dette ).

- Utilité de la vente à découvert: spéculer sur la baisse du cours de l'action (=stock price) = convenir d'un repo, vendre l'action immédiatement, l'acheter plus tard (espérons-le) à un prix inférieur, la restituer au propriétaire initial et récupérer sa garantie. (on gagne la différence)

La vente à découvert déstabilise-t-elle les marchés parce qu'elle accélère la baisse du cours de l'action (plus les gens spéculent sur la baisse du cours d'une action, plus vite elle diminue)? Si oui, faut-il interdire la vente à découvert? preuve que ça entraîne chute du marché.

De plus: les repos représentent une part importante du financement court terme des institutions financières (banques, hedge funds ...).

Un fonds d'investissement a besoin d'une ligne de liquidité (=a liquidity line), c'ad d'une facilité de financement (=funding facility) afin de profiter d'opportunités d'investissement à court terme. De nombreux fonds sont gérés par activité car ils examinent les marchés pour identifier de nouvelles opportunités d'investissement. Le besoin de beaucoup d'argent pour investir.

Les entreprises ou les entreprises risquées peuvent perdre bcp d'argent si le marché boursier s'effondre. Une banque accepte d'accorder un financement à CT contre une garantie de bonne qualité ->repo.

- Les repo sont tombés sous le contrôle des autorités de contrôle car ils sont réputés augmenter le risque systémique en raccourcissant la maturité des financements: investissements à LT financés par des passifs à CT → augmentation du risque de refinancement (=rise of rollover risk) → risque de liquidité.

Pb: un fonds d'investissement a sélectionné des actions et prend des parts dans ces sociétés, il s'agit d'un investissement LT. car l'objectif est de conserver la part pendant 5 ans. Afin de financer cet investissement, le fonds a besoin d'argent. Certains investisseurs sont sensibles à la liquidité de l'investissement: ils apprécient l'opportunité de récupérer leur argent le plus tôt possible (= revendre leur participation dans le fonds d'investissement).

Risqué de transformation (=transformation risk) : LT & côté actif (=asset side)

Côté passif (=Liability side) : financement à maturité + courte

Repo sont des financements à CT.

Si les prix chutes → bcp d'investisseurs vont vouloir vendre leurs actifs au même moment. Exemple : ce qui s'est passé en 2008.

Aux USA, les Repo en cours représentent en moyenne 3000 milliards USD à tout moment. C'est une source de financement très importante pour de nombreuses institutions.

– Le rendement attendu du portefeuille est:  $E[r_P] = aE[r_1] + (1 - a)E[r_2]$

– Sa variance:

$$\begin{aligned} Var[r_P] &= \sigma_P^2 \\ &= a^2\sigma_1^2 + (1 - a)^2\sigma_2^2 + 2a(1 - a)Cov(r_1; r_2) \\ &\text{(combinaison des résultats 3 \& 4)} \\ &= a^2\sigma_1^2 + (1 - a)^2\sigma_2^2 + 2a(1 - a)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \end{aligned}$$

– 2 hypothèses assez simples :

i.  $0 \leq a \leq 1$  : pas de vente à découvert, ne peut pas investir plus que la richesse initiale. = il est possible de construire un portefeuille qu'avec un seul actif.

ii.  $-1 < \rho_{12} < 1$  : une corrélation parfaite (positive ou négative) ne se produit pas en pratique.

– à partir des équations précédentes :

Rendement attendu du portefeuille et variance du rendement du portefeuille :

$$\begin{cases} E[r_P] = aE[r_1] + (1 - a)E[r_2] \\ Var[r_P] = a^2\sigma_1^2 + (1 - a)^2\sigma_2^2 + 2a(1 - a)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \end{cases}$$

Ici isolons  $a$  dans l'espérance et on le remplace dans la formule de variance.

$$\begin{cases} a = \frac{E[r_P] - E[r_2]}{E[r_1] - E[r_2]} \\ Var[r_P] = \left( \frac{E[r_P] - E[r_2]}{E[r_1] - E[r_2]} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( 1 - \frac{E[r_P] - E[r_2]}{E[r_1] - E[r_2]} \right)^2 \sigma_2^2 \\ \quad + 2 \frac{E[r_P] - E[r_2]}{E[r_1] - E[r_2]} \left( 1 - \frac{E[r_P] - E[r_2]}{E[r_1] - E[r_2]} \right) \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \end{cases}$$

On voit une relation entre la variance du rendement du portefeuille & son espérance.

La seule variable ici :  $E(r_P)$

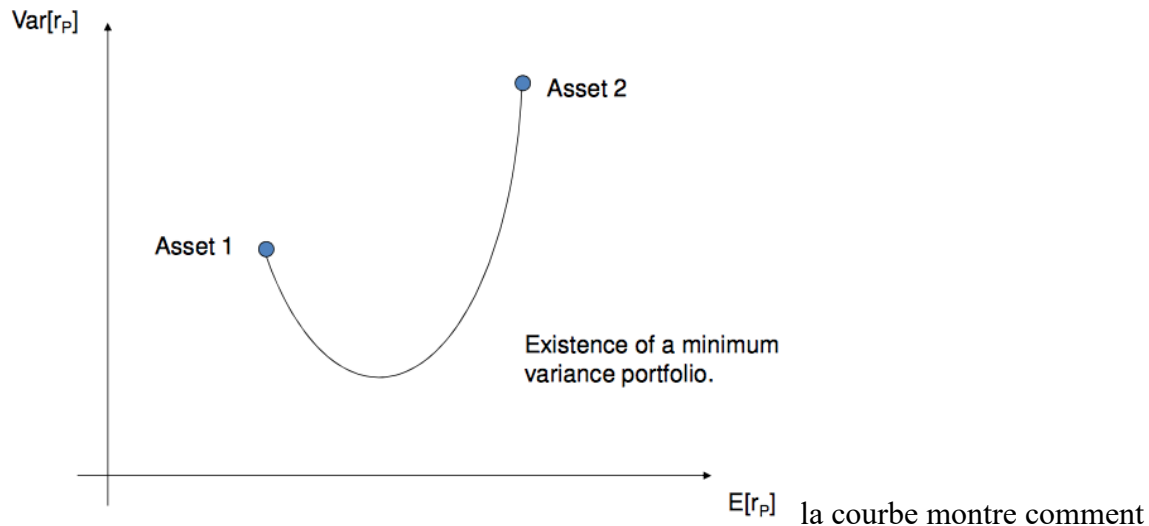
Si un investisseur considère différentes valeurs de  $a$  (investir plus ou moins sur l'actif 1), pour chaque valeur possible, je serai en mesure de calculer un rendement attendu et une variance du rendement. donc une meilleure compréhension du mouvement ensemble du rendement attendu et de sa variance. Quel est l'effet sur  $E(r_P)$  &  $var(r_P)$ . S'ils évoluent ensemble, comment l'un change-t-il lorsque l'autre change.

Var & espérance répondent à des variations de  $a$ .

- La dernière équation établit une relation entre le rendement attendu du portefeuille (=portfolio expected return) et la variance du portefeuille, lorsque  $a$  varie entre 0 et 1. En effet: pour chaque valeur possible de  $a$ , le portefeuille résultant présente un rendement attendu et une variance différents.

- Ainsi, cela permet d'analyser la relation conjointe rendement/risque (pour un portefeuille à deux actifs) et d'identifier les combinaisons rendement/risque qui pourraient être intéressantes pour un investisseur averse au risque.

On peut montrer que la relation rendement / risque a la forme suivante:



évolue  $e(r_p)$  quand  $a$  change.

Asset 1 : un portefeuille où  $a = 1$  = on a investi 100% de son argent dans asset 1.

Si je veux commencer à investir dans asset 2 : je dois vendre un peu de asset 1.

On voit que l'introduction de l'actif 2 dans le portefeuille augmente le rendement attendu du portefeuille: la courbe se déplace vers la droite.

Lorsque nous introduisons l'actif 2, le risque de rendement du portefeuille diminue. Mais nous avons dit que l'actif 2 est plus risqué que l'actif 1. il semble qu'il existe une variance minimale. Après ce minimum, augmenter la part de l'actif 2 augmente le risque.

La courbe se termine à l'actif 2 uniquement: tout est investi dans l'actif 2 = il n'y a plus d'actif 1.

- Le rendement de l'actif 2 n'est pas parfaitement corrélé avec le rendement de l'actif 1 → Les situations où l'investisseur est mieux avec deux actifs qu'avec le seul actif 1 existent toujours.

Considérons le scénario suivant, avec un investissement initial de 100:

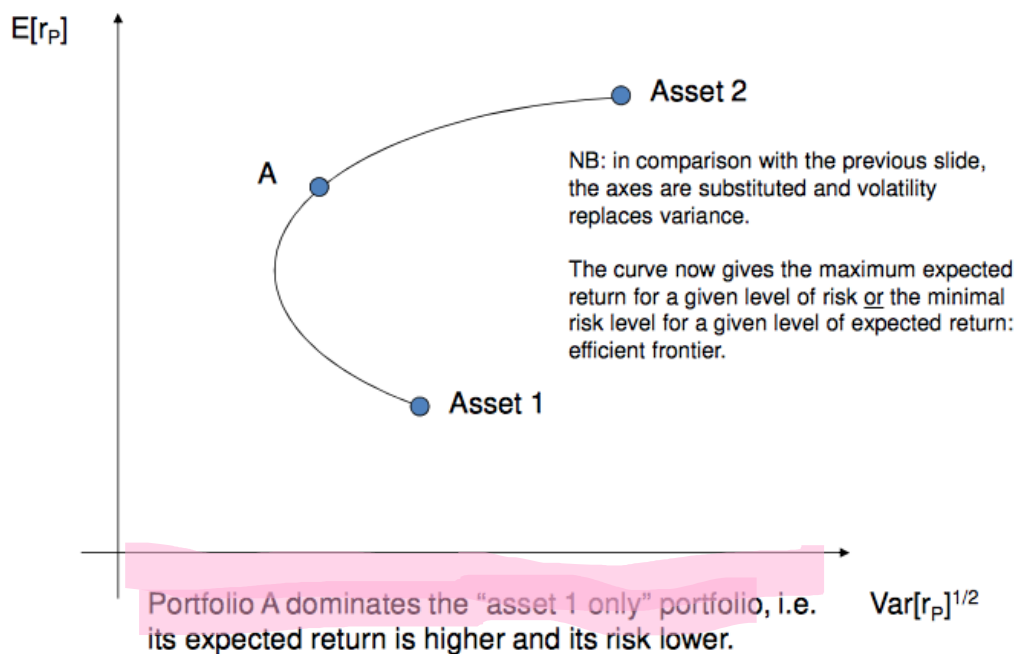
| Scenario                               | Asset 1 only | 50:50 portfolio |
|----------------------------------------|--------------|-----------------|
| Asset 1 loses 20%<br>Asset 2 loses 10% | 80           | 40 + 45 = 85    |

Mieux vaut avoir un portefeuille diversifié car les actifs ne sont pas parfaitement corrélés. Bien sûr, il existe également des situations dans lesquelles l'investisseur serait dans une situation pire avec deux actifs.

Ainsi, la diversification offre des opportunités de réduction des risques, la variance du rendement du portefeuille diminue.

- Cependant, à mesure que la part de l'actif 2 augmente, le portefeuille ressemble de plus en plus à un portefeuille «actif 2 uniquement», c'est-à-dire que la variance augmente car les opportunités de réduction des risques disparaissent.

Frontière d'efficience à 2 actifs :

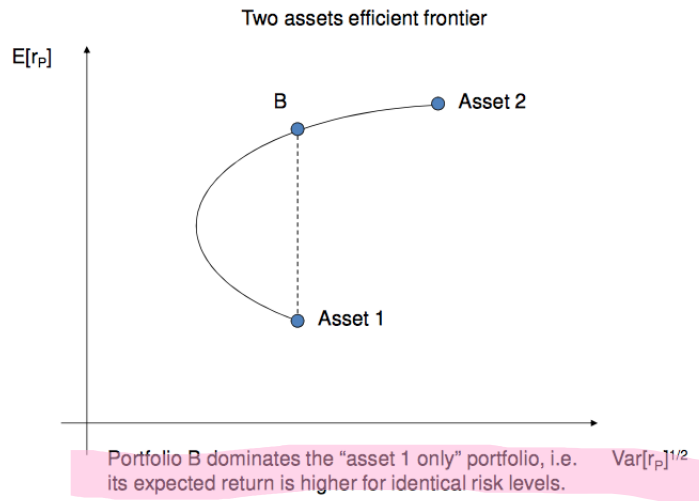


Attention : axes inversés. Mais c'est exactement la même courbe.

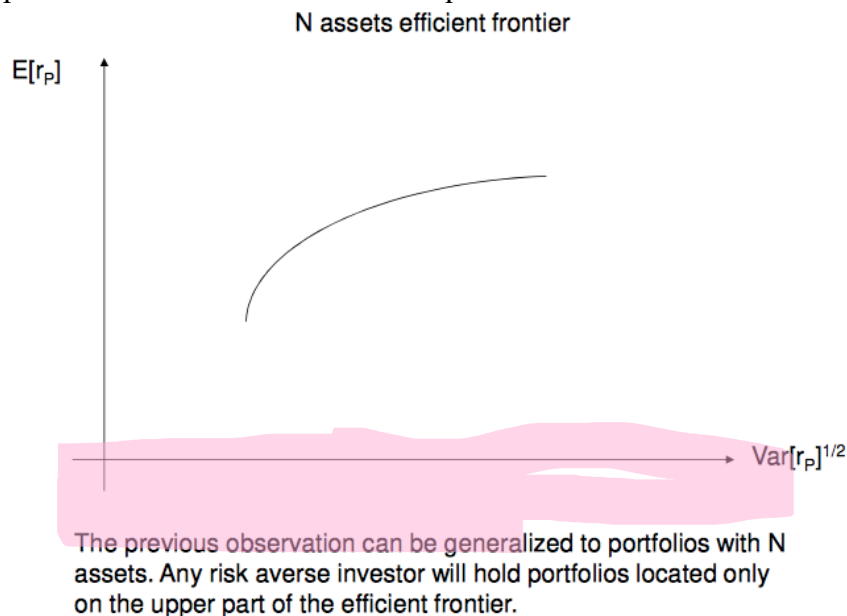
Frontière: un investisseur averse au risque serait intéressé avec un risque plus faible et une attente de résultat plus élevée = nord-ouest du graphique.

Impossible d'investir dans un portefeuille au-dessus de la courbe. C'est une frontière: nous ne pouvons pas atteindre un point au-dessus de la courbe.

Certains investisseurs préfèrent le portefeuille A, d'autres le portefeuille 2. Dans tous les cas, A & 2 sont préférés au portefeuille 1.



B a le même risque que l'actif 1 mais un rendement attendu plus élevé que l'actif 1 → le portefeuille B domine l'actif 1 uniquement.



à l'e\* du marché aucun investisseur de la sélection adverse va choisir un portfolio du bas de la frontière.

## B. Diversification & risque systématique

- La combinaison de plusieurs actifs au sein d'un portefeuille permet d'obtenir des paires risque-rendement augmentant l'utilité pour un investisseur averse au risque.

- Cependant, le cas des deux actifs suggère que s'il existe une variance minimale, il s'agit toujours d'un portefeuille de variance positive, c'est-à-dire pas d'un portefeuille sans risque.

- une diversification accrue, c'est-à-dire l'inclusion d'un nombre arbitrairement élevé d'actifs différents, réduit-elle encore le risque?

- Si oui, à quel niveau? Possible de créer un portefeuille sans risque qu'avec un actif risqué ?

- Si le risque de portefeuille ne peut être complètement éliminé, quelle est la nature du risque résiduel?

- Considérons un portefeuille avec N actifs différents. Son rendement attendu et sa

$$\begin{aligned}E[r_P] &= \sum_i a_i E[r_i] \\Var[r_P] &= \sum_i \sum_j a_i a_j \sigma_{ij} \\ \sum_i a_i &= 1\end{aligned}$$

variance (de rendement) sont donnés par:

1ère ligne : rendement attendu (=expected rendement) : moyenne pondérée du rendement attendu des actifs x leurs parts investies dans leurs actifs.

2ème ligne : somme i et somme j de la somme j de i, j et ij.

– Notations

*if  $i \neq j$  then  $\sigma_{ij} = Cov(r_i; r_j)$*

*if  $i = j$  then  $\sigma_{ij} = Var[r_i]$*

La variance du portefeuille est la somme de toutes les variances et la somme de toutes les covariances entre chaque a, i, j périodes d'actifs.

On peut pas investir + que ce qu'on a donc sum de  $a_i = 1$

– pour N = 3 :

$$E[r_p] = a_1 E[r_1] + a_2 E[r_2] + a_3 E[r_3]$$

$$\begin{aligned} Var[r_p] &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j \sigma_{ij} \\ &= a_1 a_1 \sigma_{11} + a_1 a_2 \sigma_{12} + a_1 a_3 \sigma_{13} \\ &\quad + a_2 a_1 \sigma_{21} + a_2 a_2 \sigma_{22} + a_2 a_3 \sigma_{23} \\ &\quad + a_3 a_1 \sigma_{31} + a_3 a_2 \sigma_{32} + a_3 a_3 \sigma_{33} \\ &= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + a_3^2 \sigma_3^2 + 2a_1 a_2 \sigma_{12} + 2a_1 a_3 \sigma_{13} + 2a_2 a_3 \sigma_{23} \end{aligned}$$

$$1 = a_1 + a_2 + a_3$$

Ligne 1 :  $e(r_p)$ : rendement attendu de chaque actif = rendement attendu de  $a_1$ ,  $a_2$  &  $a_3$

Considérons un portefeuille de pondération égale, c'est-à-dire  $a_i = 1/N$  quel que soit  $i$ . = Portefeuille où l'investisseur décide de donner la même part de sa fortune à chaque actif disponible. Si 10 actifs: 10% de la richesse sur chaque actif. On remplace  $a_i$  par  $1/N$  donc on remplace  $a_i^2$  par  $1/N^2$

La variance du rendement du portefeuille devient :

$$Var[r_p] = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j, j \neq i} a_i a_j \sigma_{ij} = \frac{1}{N^2} \sum_i \sigma_i^2 + \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{j, j \neq i} \sigma_{ij}$$

On définit :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^2$$

la variance moyenne. c'est la somme des variances sur  $N$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{(N^2 - N)} \sum_i \sum_{j, j \neq i} \sigma_{ij}$$

la covariance moyenne par paire. Somme de toutes les covariances à partir desquelles nous calculons la moyenne. Pour ce faire, nous devons connaître le nombre de termes de cette somme. On a  $N^2 - N$  car si  $N = 3$  double somme définissant la somme a 9 termes. Nous avons précédemment exclu les variances. Nous avons  $N$  variances donc  $N^2 - N$ .

Ça donne :

$$Var[r_p] = \frac{N}{N^2} \bar{\sigma}^2 + \frac{N^2 - N}{N^2} \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N} \bar{\sigma}^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}_{ij}$$

$\bar{\sigma}_{ij}$   
Covariance =

On peut simplifier encore  $N/N^2 = 1/N$

+ N grandit + 1/N devient petit et tend vers 0.

Donc  $\frac{1}{N} \bar{\sigma}^2$  tend vers 0

- Si N tendre vers l'infini, càd que l'investisseur peut investir dans un nombre arbitrairement élevé de titres. Ca mène à:  $\lim_{N \rightarrow +\infty} Var[r_P] = \bar{\sigma}_{ij}$

= Le niveau de risque minimum d'un portefeuille parfaitement diversifié est déterminé par le niveau de covariance moyen des rendements et non par les variances des actifs.

- Théoriquement, la covariance moyenne peut être nulle. Si tous les actifs risqués sont parfaitement indépendants, toutes les covariances sont égales à 0, donc la covariance moyenne est égale à 0.

- Cependant, la covariance moyenne d'un portefeuille de N (avec N grand) actifs ne peut pas être négative.

Intuition: si A et B ont une covariance négative et que B et C ont également une covariance négative, on peut s'attendre à ce que A et C aient une covariance positive.

Si l'investisseur peut investir dans bcp d'actifs risqués, le risque du portefeuille tend vers la covariance moyenne. C'est la covariance qui détermine donc le risque du portefeuille.

Ce n'est pas possible de faire un portefeuille sans risque qu'avec des actifs risqués. On atteint un niveau minimal de risque mais il ne sera pas de 0.

- Ce risque résiduel est appelé **risque systématique** car il reflète la tendance des rendements à évoluer dans la même direction. Sur le marché des actions, en général le même jour, les actions vont dans le même sens.

— Attention: résiduel ne signifie pas forcément faible.

Portefeuille bien diversifié : 15 – 20 actions. Mais c'est une vieille façon de penser. Ajd, on dit que bien diversifié = 30-40 actions. Les économistes ont vu que sur les 50 dernières années, le nombre d'actions qu'un investisseur doit avoir pour avoir un portefeuille bien diversifié augmente. Pas d'explication à cela.

— pq ça va dans un sens ? Le risque systématique reflète le fait que les entreprises sont plus ou moins exposées à un ensemble commun de facteurs de risque: demande agrégée, politiques éco, tensions géopolitiques... toutes les entreprises sont confrontées à des facteurs macroéconomiques. Elles réagissent de la même façon. Ex: si tensions entre US &

Chine sur pôle commerciale, toutes les eses US qui exportent en chine sont affectées par ces tensions.

Mais toutes les eses ont pas la même sensibilité aux changements macroéconomiques : c une généralité, ça se passe la plupart du temps.

– La diversification existe dans la mesure où il n'y a pas de corrélation parfaite.

• Attention: alors que la covariance par paire négative est une représentation intuitive de la diversification (on a un portfolio de 2 actifs, s'ils ont une covariance négative, si on voit observer un retour positif d'un actif alors l'autre sera négatif : ça se compense donc ma situation sera neutre), ce n'est pas une condition nécessaire à l'existence de la diversification.

Un potentiel de diversification existe à partir du moment où la corrélation est inférieure à 1. En effet, les situations où l'investisseur est mieux à même de détenir plusieurs actifs que d'en détenir un seul existent dans la mesure où le coefficient de corrélation est inférieur à 1. En d'autres termes, la diversification existe, bien que limitée, même si le coefficient de corrélation est élevé (par exemple 0,99).

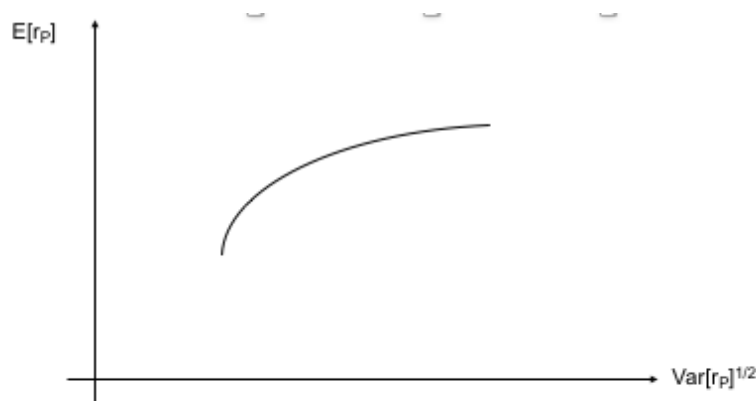
- Le risque «éliminé» par diversification est appelé risque spécifique ou idiosyncratique.

Le risque spécifique reflète l'impact sur le rendement des facteurs de risque propres à chaque entreprise: compétences managériales, innovation, fraude, accidents ...

En fait, le risque spécifique n'est pas éliminé. Si on a un portfolio de 20 actions on est toujours exposés au risque qu'un événement affecte 1 de ses 20 actions. Mais les facteurs de risque spécifiques sont supposés indépendants (non corrélés) d'une entreprise à l'autre.

Ainsi, en moyenne, les «mauvaises nouvelles» affectant spécifiquement certaines entreprises sont compensées par les «bonnes nouvelles» touchant spécifiquement d'autres entreprises, conduisant à un effet agrégé attendu nul (si y a assez d'eses ds le portfolio)

### Frontière d'efficié avec N actifs



L'observation précédente peut être généralisée aux portefeuilles à N actifs. Tout investisseur défavorable au risque détiendra des portefeuilles situés uniquement sur la partie supérieure de la frontière efficiente.

On parle de frontière car pour un niveau de risque donné, la frontière efficiente donne le rendement attendu le plus élevé avec N actifs risqués.

### C. Introducing a riskless asset: the securities' market line.

- Actif sans risque: un certain rendement  $r_f$  c'est-à-dire une variance nulle (un ZC gouvernementale à court terme)
- Prenons un portefeuille formé d'un portefeuille risqué A situé à la frontière efficace de l'actif risqué et d'une certaine quantité de l'actif sans risque:

$$E[r_p] = \alpha E[r_A] + (1 - \alpha)r_f$$

$$Var[r_p] = \alpha^2 Var[r_A] + (1 - \alpha)^2 Var[r_f] + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(r_A; r_f)$$

$$= \alpha^2 Var[r_A] \Leftrightarrow \sigma_p = \alpha \sigma_A$$

$$\Rightarrow E[r_p] = r_f + \frac{(E[r_A] - r_f)}{\sigma_A} \sigma_p$$

$\alpha$  : part de la richesse investie sur le portefeuille  $\alpha$

$1-\alpha$  : part de la richesse investie sur un actif non risqué

Ligne 1 : rendement attendu de  $\alpha$  + rendement attendu de ZC.

Variance de l'actif non risqué = 0

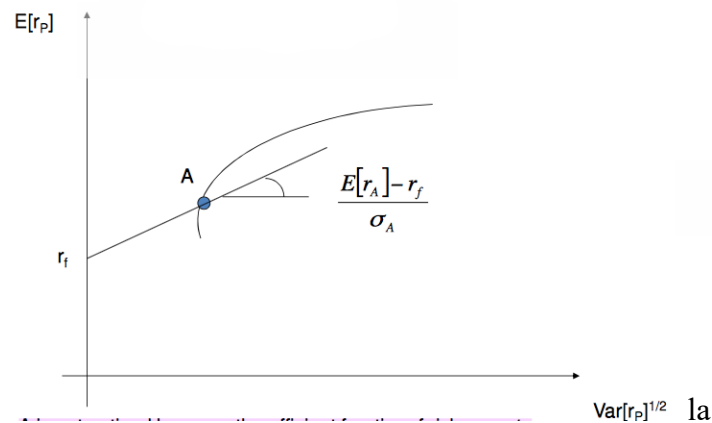
$r_f$  change pas c'est une constante donc covariance = 0

Dernière équation : on isole  $\alpha$  en le remplaçant par le résultat de l'avant dernière ligne.

rendement attendu du portefeuille p = rendement de l'actif non risqué + écart-type du rendement du portefeuille x le ratio.

- relation linéaire entre le risque du portefeuille  $\sigma_p$  & son rendement espéré.

#### Combinaison du portefeuille A & de l'actif non risqué



$r_f$  correspond au portefeuille qu'avec un actif : l'actif non risqué. Il n'est pas disponible pour les investisseurs.

A : portefeuille : on investit tout l'argent seulement dans le portefeuille A qui est fait que d'actifs risqués et est sur la frontière d'efficience. Disponible pour les investisseurs.

gauche de A : portefeuille où on investit une part positive de l'argent dans l'actif risqué & une part positive dans le portefeuille A : combinaison positive.

A droite de A : situation où la part investie dans A est supérieure à 1. Donc  $A > 1$ . La somme des parts doit être égale à 1 donc on n'investit rien dans les actifs non risqués.

Si j'ai 10k, je veux investir A. si je peux investir 5k de plus grâce à un prêt bancaire, je mets dans A. investissement net : 10k car 5k sont empruntés ( je devrai rembourser)

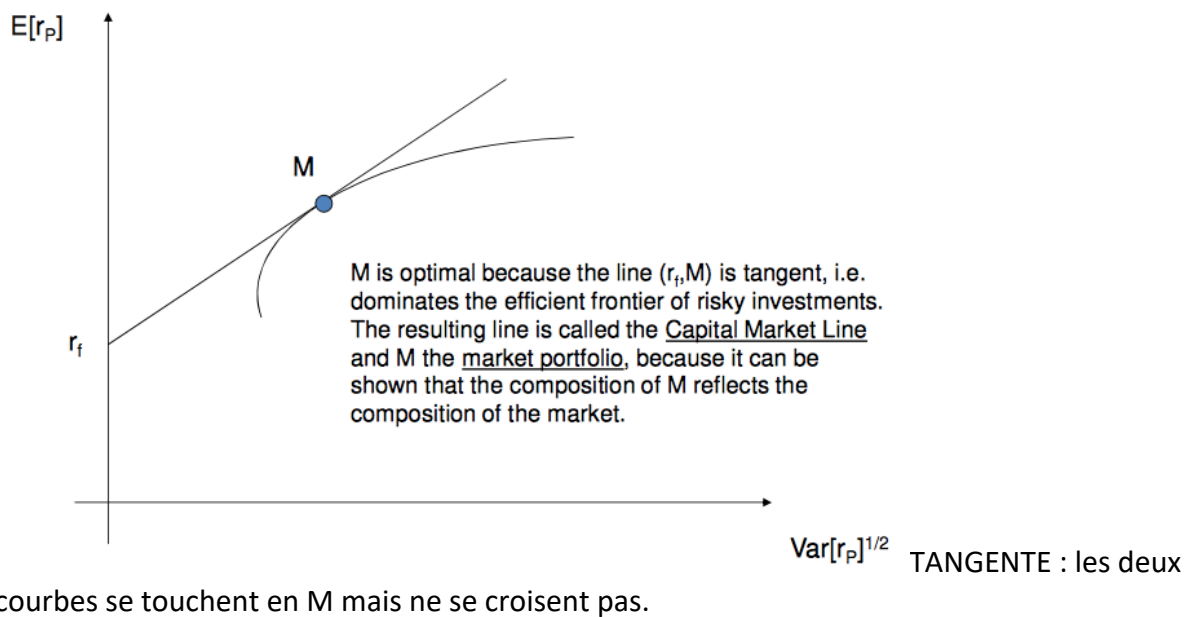
Tous les portefeuilles qui combinent A & l'actif non risqué sont sur la frontière d'efficience.

L'équation c la pente de la droite.

A n'est pas optimale car la frontière efficiente des actifs risqués domine la majeure partie de la ligne résultant de la combinaison de A et de l'actif sans risque.

A la droite de A : on peut voir que les portefeuilles là sont pas intéressants pour les investisseurs averses au risque.. Là, c'est dominé par les portefeuilles qui ont davantage d'actifs risqués.

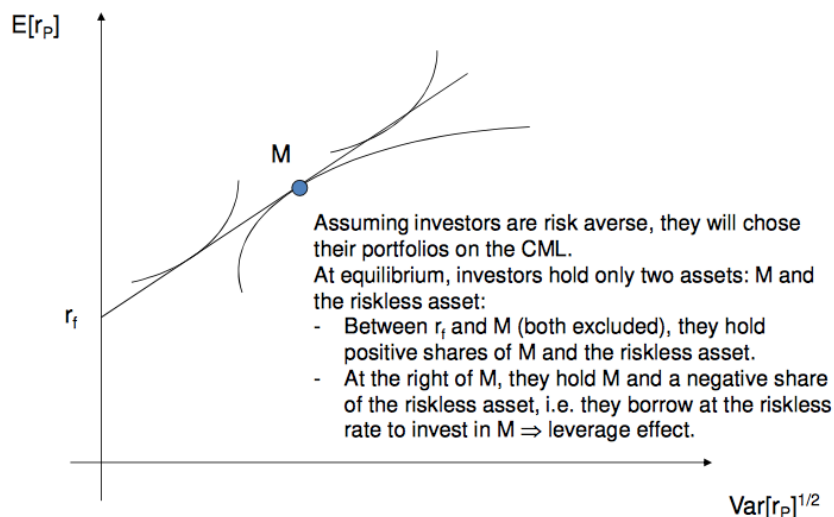
### Combining M and the riskless asset



La composition de M reflète parfaitement le marché : M est un perfect market index. Tous les investisseurs veulent le portefeuille M car c'est le meilleur. Tout le monde le veut donc la seule solution est que M reflète parfaitement la composition du marché. --> M = market portfolio.

La ligne représente un ensemble optimal de portefeuilles disponibles pour les investisseurs qui ont accès à des actifs non risqués & risqués.

### Portfolio choices of risk averse investors



La courbe d'indifférence correspond à 2 investisseurs.

Quand la courbe d'indifférence est tangente à la « market line », c'est le meilleur choix disponible pour la personne.

$E^*$  : seulement 2 actifs : portefeuille M + l'actif non risqué.

On veut déterminer l'investissement optimal en termes de risque mesuré par l'écart type du portefeuille & son espérance

Les investisseurs averses au risque doivent déterminer l'investissement optimal selon ces 2 dimensions qui déterminent la meilleure combinaison en terme de risque & de rendement.

Du moment où les investisseurs ont accès à l'actif non risqué, ils vont créer des portefeuilles localisés sur la capital market line qui représente toutes les combinaisons possibles du portefeuille de marché M & les actifs non risqués.

Donc à l' $e^*$  les investisseurs prennent que 2 actifs : le portefeuille de marché M & l'actif non risqué.

On a vu qu'entre  $r_f$  & M, les investisseurs averses au risque, ont des parts positives de M & de l'actif non risqué.

En pratique, on va investir ds un fond d'investissement qui va prendre le portefeuille de marché & des actifs non risqués.

Le portefeuille de marché peut être par ex le CAC40 donc le fond d'investissement aurait des obligations du gouvernement français.

On a aussi vu, qu'à la droite de M, les investisseurs ont M & une part négative de l'actif non risqué.

En pratique, les investisseurs empruntent de l'argent à un taux d'intérêt sans risque pour + investir dans M. le gros montant investi dans le portefeuille = richesse personnelle de l'investisseur + le prêt de la banque. Ça correspond à un **effet de levier**.

Le modèle d'évaluation des actifs financiers (=the capital pricing model) ne paraît pas utile en terme de tarification des actifs (=asset pricing) qui est en fait le sujet du chapitre.

Le terme « tarification des actifs » donne l'idée que ce serait possible de déterminer le prix théorique (= prix d' $e^*$ ) de n'importe quel actif financier. Éventuellement, comparer ce prix d' $e^*$  au prix observé sur le marché des actions (=la bourse) pour voir si un actif est sous-évalué (= prix observé < prix d' $e^*$ ) puis on pourrait, par ex, réaliser un profit rien qu'en achetant l'actif & en attendant qu'il atteigne son prix correct (=son prix théorique) pour gagner la différence. En fait, et c'est ce qu'on va voir ajd, c'est possible d'utiliser un cadre du modèle d'évaluation des actifs financiers pour déterminer l'espérance théorique de n'importe quel actif risqué. & pour utiliser ce résultat dans la tarification des actifs.

Graphique : on se concentre sur le portfolio M. on voit que M est situé en mm temps sur la frontière d'efficience & sur la ligne du marché des capitaux. Techniquement, la ligne du marché des capitaux & la frontière des actifs risqués sont tangentes en M.

En termes mathématiques, ça veut dire que les 2 courbes ont la même pente donc la même dérivée en M. là, on va calculer la dérivée de la ligne du marché des capitaux en M & la dérivée de la frontière d'efficience des actifs risqués en M.

(Ce qui est important c les résultats des formules. )

#### D. Evaluation d'un actif unique (=Single asset valuation)

Le modèle CAPM permet de calculer le rendement attendu à l'équilibre pour un actif **individuel**.

1. La pente de la ligne du marché des capitaux au portefeuille de marché est donnée

$$\frac{dE[r_P]}{d\sigma_P} = \frac{E[r_M] - r_f}{\sigma_M} \quad (1)$$

par :

2. La pente des frontières efficientes des portefeuilles risqués au niveau du portefeuille de marché :
- Considérons un portefeuille avec des pondérations  $a$  sur l'actif  $i$  et  $(1-a)$  sur  $M$ . Son rendement attendu et son écart-type sont:

$$\sigma_P = (a^2 \sigma_i^2 + (1-a)^2 \sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_i \sigma_M \rho_{iM})^{1/2}$$

Le modèle d'évaluation des actifs financiers permet de calculer le rendement espéré d'équilibre pour un actif risqué individuel.

On commence par calculer la pente de la ligne du marché des capitaux en M. calcul simple pcq la ligne du marché des capitaux est une droite & on sait que la pente d'une droite est constante. C'est la formule (1).

Pour la frontière d'efficience d'un actif risqué ou portfolio risqué, c + compliqué. Faut se souvenir que le portefeuille du marché  $M$  est un portefeuille qui représente parfaitement le marché financier. Donc, quand on achète  $M$ , on a le miroir parfait du marché fi. Imaginons qu'on veut investir dans un des actifs risqués. Ex : CAC40 qui est le principal indice boursier parisien et c un portefeuille virtuel qui serait formé des 40 principaux actifs cotés à la Bourse de Paris. C donc un indice(=index) de marché. Il est parfait car intègre les principaux actifs. Imaginons qu'on veut investir dans un portefeuille qui imite parfaitement le CAC40 & imaginons qu'on décide d'investir un peu + pour un actif . ça équivaut à considérer un portefeuille qui investit  $a$  dans l'actif  $i$  et  $1-a$  dans le portefeuille de marché  $M$ .  $M$  intègre déjà des actifs risqués  $i$ . mais on en veut un peu +.

Rendement attendu du portefeuille :  $a \times \text{rendement attendu de } i + (1-a) \times \text{rendement attendu de } M$

Puis je prends la racine carrée de la variance pour avoir l'écart type (=standard deviation).

→ on a défini le retour espéré & l'écart type du portefeuille.

– The theorem of implicit functions states that:

$$\frac{dE[r_P]}{d\sigma_P} = \frac{\frac{\partial E[r_P]}{\partial a}}{\frac{\partial \sigma_P}{\partial a}} = \frac{E[r_i] - E[r_M]}{\frac{1}{2} [2a\sigma_i^2 - 2(1-a)\sigma_M^2 + (2-4a)\sigma_i\sigma_M\rho_{iM}] \left( (a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_i\sigma_M\rho_{iM}) \right)^{-1/2}}$$

– However, this strategy is not optimal. The optimal strategy is to hold the market portfolio M and the riskless asset, i.e.  $a = 0$ . Thus:

$$\left. \frac{dE[r_P]}{d\sigma_P} \right|_{a=0} = \frac{E[r_i] - E[r_M]}{\frac{\sigma_i\sigma_M\rho_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}} \quad (2)$$

Maintenant, calculons la dérivée de (Er). On veut calculer la dérivée pcq les investisseurs font des choix en termes d'Er & d'écart-type de leur portefeuille. Quand ils décident de modifier leur portefeuille ils considèrent les csq de ces changes en termes d'Er & d'écart type : retour & risque. Ils prennent des décisions à partir de ces données pour avoir un portefeuille optimal.

Pour calculer la dérivée ici on prend le **théorème des fonctions implicites** : Er & l'écart type sont des fonctions de a (une variable implicite). Ça nous donne le théorème. On remplace les données avec celles qu'on a trouvé juste avant.

Cette stratégie est pas optimale. La meilleure stratégie selon le modèle d'évaluation des actifs financiers est d'avoir le portefeuille M + des actifs non risqués. Mais construire un portfolio de M + actifs risqués n'est pas une stratégie optimale donc a doit être égal à 0

Si on remplace a par 0 dans l'équation, on a la formule (2)

M appartient à la frontière d'efficience de portefeuilles risqués & à la ligne du marché des capitaux donc les équations 1 & 2 sont égales.

On récrit cette égalité et ça nous donne un résultat qui est le résultat principal du modèle d'évaluation des actifs financiers.

$$\frac{E[r_M] - r_f}{\sigma_M} = \frac{E[r_i] - E[r_M]}{\frac{\sigma_i\sigma_M\rho_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}}$$

$$\Leftrightarrow E[r_i] = r_f + \frac{\sigma_i\sigma_M\rho_{iM}}{\sigma_M^2} [E[r_M] - r_f]$$

$$\Leftrightarrow E[r_i] = r_f + \beta_i [E[r_M] - r_f] \text{ with } \beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

Le rendement attendu est le taux sans risque + la prime de risque pondérée du marché. la pondération  $\beta$  reflète le risque systématique de l'action.

On a donc la **CAPM relationship** =  $E_r$  d'un actif risqué est le risque  $r_f$  + une prime de risque . cette prime de risque est en fait le risque pondéré (weighted risk) du marché.

L'expression entre parenthèse c'est *the excess market return*. Cette expression peut être interprétée comme la prime de risqué du marché pcq c la différence entre  $E_r$  & le taux sans risque.

Le prime de risque : ce que je décide si je décide d'investir sur le marché des capitaux (=la bourse) plutôt que ds un actif non risqué. *the excess market return* est pondéré par un coefficient  $B_i$  qui est la covariance entre le retour de I & le retour de M divisé par la variance du retour de M.

*Idée importante : la covariance.* B reflète le risque systématique de l'actif. c une mesure du lien entre le retour de l'actif risqué & le retour du marché M.

+ la covariance est grande + la sensibilité du retour de l'action aux conditions du marché. Donc, l'actif est exposé à des conditions éco générales appelées « **systématique risque** ». c pour ça que B est une mesure du risque de l'actif risqué.

### RELATION TRÈS IMPORTANTE À CONNAITRE & COMPRENDRE.

#### 1<sup>ère</sup> remarque :

Le modèle d'évaluation des actifs financiers est un modèle à un facteur.

La prime de risque de marché agrège l'impact de tous les facteurs de risque systématiques.

Les actifs risqués sont exposés à des facteurs de risques systématiques qui sont identifiés avec des variables macroéconomiques générales : politiques monétaires, tensions géopô, innovations... ces facteurs important + ou – toutes les entreprises de la même manières.

C'est difficile en pratique, d'identifier les facteurs de risques systématiques vraiment pertinents : quelle variable générale doit-on prendre en considération quand on veut mesurer l'exposition des actifs risqués. On doit faire une sélection. Cette sélection varie selon le temps & l'endroit : elle diffère selon les époques & les pays.

Ici, CAPM donne une bonne solution à ce pb. Ce modèle considère que tous les facteurs de risque peuvent être représentés par le market. Les effets de tous les risques possibles agrège la variation du market return. Si le market return augmente, ça veut dire que tous les risques systématiques sont positives même si je suis pas capable de définir ces risques.

Si le return de la bourse(=stock market) est négatif, l'effet agrégé de tous les facteurs de risque systématiques est négatif.

→ l'effet agrégé de tous les facteurs de risque systématiques est résumé par le retour du marché.

On peut remplacer tous les facteurs de risques possible par un seul : le return du marché des actions (la bourse). C'est pour ça que le modèle d'évaluation des actifs financiers est un modèle à un facteur pcq le market excess return agrège l'impact de tous les facteurs de

risque systématiques. Cette approche comble notre difficulté à identifier les facteurs de risque systématiques pertinents.

## 2<sup>nd</sup>e remarque :

Comment mettre en place le CAPM ? en fait, si on regarde la relation CAPM, y a un B. On doit calculer B si on veut mettre en place le modèle.

On va donc utiliser une régression linéaire des retours des actions observés sur les retours du marché observé : on va créer un modèle statistique : on définit une relation entre le retour de l'actif i au temps T (t= une date ou un temps comme une journée, une semaine, un mois.).

Le retour de l'actif i en t c'est le résultat d'une relation linéaire.

**Cette relation c'est :**

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$$

La constante  $\alpha_i$  +  $\beta_i$  x le retour du marché en t + un terme d'erreur (pcq on connaît pas si la vraie relation entre le retour du marché & le retour de l'actif est une relation linéaire. On observe seulement 2 variables : le retour d'un index de marché qui représente le marché financier & le retour de l'actif risqué. On sait pas si y a une relation linéaire entre ces 2 variables, c'est une hypothèse qu'on fait. En faisant cette hypothèse, on introduit peut-être une erreur dans notre modèle. C'est pour cela qu'on introduit un terme d'erreur)

La régression nous permet d'avoir une estimation statistique de  $\alpha_i$  &  $\beta_i$ .

Ce modèle statistique est appelé le « market model » par les experts.

On voit que cette relation définit une relation linéaire entre B des actions & son retour espéré. Er est une fonction linéaire du risque systématique. Ça veut dire que B d'un portefeuille est la moyenne pondérée des B de ses composants :

$$\begin{aligned} E[r_p] &= \sum_i a_i E[r_i] = \sum_i a_i (r_f + \beta_i (E[r_M] - r_f)) \\ &= r_f \sum_i a_i + (E[r_M] - r_f) \sum_i a_i \beta_i = r_f + \sum_i a_i \beta_i (E[r_M] - r_f) \\ &\Rightarrow \beta_p = \sum_i a_i \beta_i \end{aligned}$$

On sait que le retour espéré d'un portefeuille est la somme des  $E_r$  pondérés de ses actifs.

$\alpha_i$  : le montant de ma richesse que j'investis dans l'actif i.

si je remplace  $E_r$  de l'actif i par la relation CAPM, j'ai l'équation avec les parenthèses. Si je développe les parenthèses, ça donne la 2<sup>ème</sup> ligne puis je simplifie :

on voit que la dernière relation est très proche de la relation CAPM → la somme des B pondérés & le B du portefeuille.

Si on nous demande de trouver le B d'un portefeuille on doit donc agréger les B de chacun de ses composants.

– Parallel between the CAPM and portfolio choices under risk aversion:

$$E[r_i] = r_f + \underbrace{\beta_i(E[r_M] - r_f)}_{\text{Risk premium}}$$

$$E[r_i] = r_f + \underbrace{\left[ -\frac{\text{Cov}(U'(\tilde{w}_f); \tilde{x})}{E[U'(\tilde{w}_f)]} \right]}_{\text{Risk premium}}$$

- The CAPM operationalizes the theoretical portfolio choice model under risk aversion.

On peut faire un parallèle entre CAPM and le modèle des choix de portefeuille sous aversion au risque.

On a ici la relation CAPM qui définit  $E[r]$  d'un actif + prime de risque. Cette relation peut être comparée à la relation d' $e^*$  définie dans le modèle théorique du portefeuille ( $E[r]$  actif risqué = taux sans risque + une prime de risque qui implique la covariance entre le retour d'un actif risqué & l'utilité marginale de la richesse finale.)

Ces 2 relations sont très semblables. elles ont une structure similaire & une idée commune.

le modèle théorique :

On a dit que la prime de risque est déterminée par la covariance entre le retour d'un actif risqué & l'utilité marginale de la richesse finale. Cette covariance est négative. Y a l'idée d'un lien entre le retour d'un actif risqué & la richesse finale de l'investisseur : + y a un retour + la richesse finale et grande est + l'utilité marginale est faible.

+ la covariance entre le retour d'un actif risqué est rentre et + est grande la richesse générale de l'économie, + l'actif est risqué.

Les actions sont + risquées que les obligations.

Relation CAPM :

On voit que B de l'actif implique la covariance entre le retour de l'actif & le retour du marché. on peut donc dire que le portefeuille du marché est représentatif de l'état générale de l'économie. + le lien entre l'état général & le retour de l'actif est étroit, + le retour de l'actif est exposé aux conditions de l'économie donc + est grand le risque systématique de l'actif.

On a une idée similaire pour les 2 modèles : la prime de risque qu'on doit appliquer aux actifs risqués est déterminée par le lien, la covariance de l'actif & l'état général de

l'économie. On peut donc dire que CAPM opérationnalise le modèle théorie du choix de portefeuille sous aversion au risque. On peut faire une autre remarque (importante) : si on se concentre sur la prime de risque dans le CAPM, on voit qu'il considère seulement le risque systématique. Ça veut dire que les investisseurs reçoivent pas de prime pour les risques spécifiques qu'il acceptent de supporter.

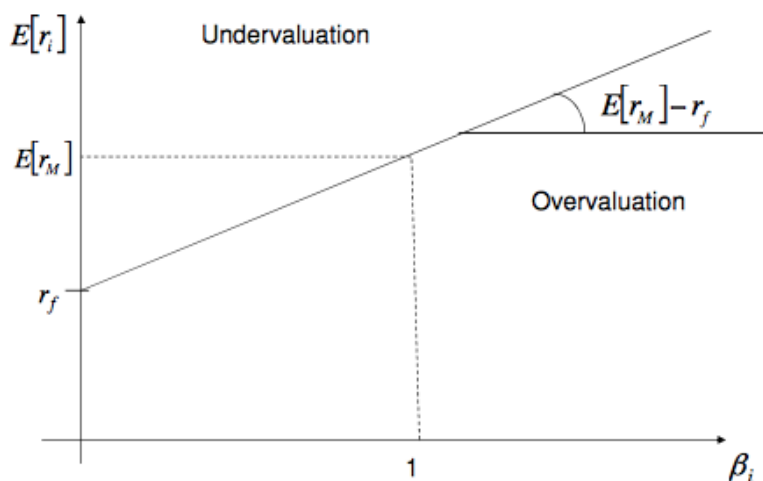
Sur les marchés financiers, si le CAPM est vrai, les investisseurs peuvent avoir une prime que pour les risques systématiques auxquels ils font face. S'ils ont sous-diversifié leur portefeuille, ils peuvent pas attendre de prime de risque.

De +, on a fait l'hypothèse que les investisseurs sont averses au risque donc ces investisseurs n'accepteraient pas d'être exposés à un risque sans prime additionnelle. Mais on peut se demander pq y a pas de prime pour les risques spécifiques dans le CAPM. En fait, la raison c'est que les investisseurs peuvent diversifier leur portefeuille, ils ont accès à un infini d'opportunités. C'est dans leur intérêt de diversifier leur portefeuille.

Les investisseurs recevront une prime que pour les risques systématiques auxquels ils sont exposés, pq le risque systématique ne peut pas se diversifier. C'est sa définition.

Idée très importante qu'on vient de voir.

E. The security asset line : the CAPM defines a linear relationship btw expected return & systematic risk(B)



By computing an equilibrium expected return, the CAPM allows detecting under- or overvalued stocks.

CAPM définit l'Er théorique d'un actif risqué (ex : l'action d'une entreprise). Ici, théorique signifie que dire CAPM s'applique donc l'e\* de Er doit être la valeur donnée par la relation CAPM.

Mais, ce n'est qu'une théorie. On pourrait, par exemple, comparer cet Er théorique avec ce le retour empirique du même actif observé sur le marché. Si on voit que y a une différence (et que CPAM est vrai), on doit dériver des recommandations pratiques des observations faites.

On peut résumer cette idée avec le graphe juste en haut qui montre la **ligne d'actifs de sécurité** (=security asset line). Cette ligne vient de l'observation que la CAPM définit une relation linéaire entre le rendement attendu et le risque systématique, c'est-à-dire le bêta.

Axe horizontal : B de l'action

Axe vertical : l'Er théorique de l'actif

La ligne débute au taux sans risque ( $0 = B$ ) et est croissante car sa pente est donnée par l'Er du marché qui est une constante et cet Er est censé être positif du fait de l'aversion au risque. Les investisseurs averse au risque vont accepter, en moyenne, d'investir dans des actifs risqués que si  $E_r > \text{retour de l'actif non risqué}$ . Sinon, tous les investisseurs averse au risque vont refuser d'investir dans l'actif risqué. C'est pour cela que la différence  $E(r_m) - r_f$  doit être positive.

La différence  $E(r_m) - r_f$  c'est le **rendement excédentaire du marché** (excess market return). Ce rendement définit la pente de la ligne d'actifs de sécurité.

Si on calcule B d'une action c'est-à-dire d'un actif risqué, l'Er théorique de cet actif sera sur la ligne de sécurité selon la valeur de B.

Si on se concentre sur le cas où  $B=1$ , Er sera l'Er du portefeuille de marché.

On peut calculer l'Er théorique qui est quelque part sur la ligne selon le B avec le retour observé.

→ si on voit que le retour sur marché de l'actif risqué  $> E_r$  théorique, on peut dire que (si CAPM est vrai), l'actif risqué est sous-évalué.

→ si on voit que le retour sur marché de l'actif risqué  $< E_r$  théorique, on peut dire que (si CAPM est vrai), l'actif risqué est surévalué.

*Pourquoi ?*

Si un actif est surévalué aujourd'hui, le taux d'escompte (=discount rate) qui s'applique sur les futures valeurs espérées est trop bas. Si le taux d'escompte augmente, la valeur de l'actif adj sera basse. C'est la relation inverse entre prix et retour (chapitre 1). + le taux d'escompte est grand + le prix adj est bas.

Le CAPM calcule l'Er théorique d'un actif. c'est le taux d'escompte qu'on devrait appliquer aux futurs flux de trésorerie (=cash flows) pour définir le prix aujourd'hui. + le taux d'escompte est bas, + le prix d'aujourd'hui est haut.

+ le taux d'escompte est haut, + le prix d'aujourd'hui est bas.

Si l'Er observé  $< E_r$  théorique, l'Er observé est trop bas et le prix observé adj est trop haut : l'actif est surévalué.

Si l'Er observé > Er théorique, l'Er observé, le taux d'escompte est trop haut et le prix observé est trop bas : l'actif est sous-évalué.

Exemple :

Considérons 2 actions avec les caractéristiques suivantes :

Rendement moyen observé de A est de 15% et  $B_a = 0,3$  (petite valeur)

Rendement moyen observé de B est de 25% et  $B_a = 2$

Le taux sans risque est de 10% et l'Er du marché est de 20%.

Si CAPM est vrai, quelle décision doit être prise ?

A:  $E[r_A] = 10\% + 0,3[20\% - 10\%] = 13\%$   
 $\Rightarrow$  undervaluation, buy.

B:  $E[r_B] = 10\% + 2[20\% - 10\%] = 30\% \Rightarrow$  overvaluation, sell.

Action A : 15% > 13% : sous-évaluation parce que Er observé est trop haut par rapport à l'Er théorique. Si le taux d'escompte est trop haut, ça veut dire que le prix est trop bas : on achète l'action.

Si A est sous-évalué aujourd'hui, si le marché atteint l' $e^*$  plus tard, le prix va augmenter : on l'achète aujourd'hui pour réaliser un profit futur.

Action B : 25% < 30% : Er est plus grand que ce qui est observé sur le marché donc l'investisseur applique un taux d'escompte trop bas donc le prix est trop élevé. L'action B est surévalué, si je la détiens je dois la vendre car son prix va diminuer. Je dois éviter la perte.

– Illustration 2

Stock A has an observed price of 100. The observed average (daily) return over the last 60 days is 5%.

Moreover:

- The risk free rate is set to 1%
- The variance of the market index is 8% with an average return of 3%
- The covariance between the return of A and the market index return is 20%

Q: Is stock A correctly priced?

The equilibrium expected return of stock A is :

$$E[r_A] = 1\% + \frac{20\%}{8\%} [3\% - 1\%] = 6\%$$

Exemple 2 :

Action A a un. Prix observé de 100 euros aujourd'hui (observed = today)

Le retour moyen observé les derniers 60 jours est 5%

Le taux sans risque : 1%

Variance de index de marche est 8% & le retour moyen est 3%  
La covariance de A et de l index de retour du marché est 20%

$$E[r_A] = 1\% + \frac{20\%}{8\%} [3\% - 1\%] = 6\%$$

L'Er théorique est de 6% pour l'action. rappel : on doit dire qu'on considère le CAPM vrai.

L'action A est surévalué.

Si on observe un retour de 5% et que le prix de l'action aujourd'hui est de 100euros, le prix anticipé est 105euros.

Le prix d'une action est le taux d'escompte de ses cash-flow attendus. Donc, le taux d'escompte de ses futurs prix anticipés doit être 99,06euros car :

$$P = \frac{105}{1 + 6\%} = 99,06 \text{ €}$$

Le prix de l'action A devrait être 99,06euros.

## F.applications du CAPM

Nous allons maintenant voir les applications pratiques du CAPM.

### 1. Ça nous permet de créer des portefeuilles optimaux.

A l'e\* du marché, les investisseurs n'ont qu'un portefeuille de marché et l'actif sans risque. Ils définissent la composition précise de leur portefeuille en fonction de leurs préférences. Ça correspond à la stratégie d'investissement la + répandue sur les marchés financiers qui est la **gestion indexée** (=index linked management) . ça signifie que s fonds répliquent les performances d'un index avec des effets de levier différents. Ils essaient de choisir un index de marché (qui est en fait un index d'industrie ou d'entreprise..). puis, ils essaient de répliquer les performances de cet index en ajustant les effets de levier du fond d'investissement selon leurs préférences.

Mais, bcp de comportements d'investisseurs ne sont pas conformes aux prédictions du CAPM. 3 exemples :

- Y a pas de prime de risque pour les risques spécifiques et selon CAPM, les investisseurs doivent avoir un portefeuille parfaitement diversifié. La majorité des portefeuilles ont sous-diversifiés. **Home bias** : les portefeuilles sont internationalement sous diversifiés : les investisseurs préfèrent investir dans leur pays domestique. C'est une mauvaise stratégie selon CAPM. Ça peut être relié à des raisons culturelles ou des coûts d'information (barrière de la langue..). c'est plus facile d'investir dans une entreprise qu'on' connaît et qu'on comprend.

- En général, les portefeuilles risqués sont inefficaces (=ils ne sont pas sur la frontière d'efficience des actifs risqués). Ça s'explique via les coûts de transaction : si je veux diversifier mon portefeuille en investissant ds bcp d'actifs risqués, mes coûts de transaction augmenteront. + je veux diversifier mon portefeuille + je dois payer des coûts de transaction.
- Même si y a pas de prime de risque sur les risques spécifiques, on peut spéculer dessus : on peut parier sur la hausse ou la baisse des actions des entreprises. On peut aussi gagner bcp d'argent comme ça. Il y a aussi une préférence pour l'asymétrie (=skewness) : bcp d'investisseurs individuels agissent comme s'ils achetaient un ticket de loterie (y a une petite chance de gagner mais bcp de risque de perdre) → en général on reçoit 0 et parfois on reçoit beaucoup : c de l'asymétrie.

Y a bcp d'anomalies sur le marché qui montrent que CAPM décrit pas parfaitement le marché.

## **2. Calcul du coût attendu des capitaux propres**

Aujourd'hui, CAPM est surtout utilisé en finance d'entreprise.

L'Er calculé par CAPM c'est l'Er de l'équité de la compagnie : les actions échangées sur le marché représentent les fonds propres de la firme. CAPM permet de calculer les FP attendus d'une entreprise.

Comme tout autre modèle, le CAPM a des limites.

Beaucoup de comportements observés sur le marché financier n'est pas en adéquation avec les résultats du CAPM.

Y a des limitations opérationnelles :

1. Les index de références (index benchmark) sont en général inefficaces. Si on veut mettre en place le CAPM dans la vie réelle, il faut choisir un portefeuille de marché. mais y a pas d'index général représentatif de toutes les opportunités d'investissements dispo. En général, les experts utilisent un indice boursier mis en place ds leur pays. En France, CAC 40. Des recherches ont prouvé que ces index sont inefficaces : ils ne sont pas sur la frontière d'efficience des actifs risqués alors que CAPM dit que le portefeuille de marché est efficace et est situé sur la frontière d'efficience des actifs risqués.
2. Le CPAM demande le calcul de bcp d'infos : moyens historiques, variances & covariances de retour. + y a de paramètre qu'on veut, + y a un « **bruit statistique** » (= high statistical noise). C lié au fait Le nombre de covariance par paire augmente de façon exponentielle avec le nombre d'actifs. On a vu que calculer l'Er & variance du retour d'un portefeuille implique de calculer toutes les covariances entre les retours. Or, le nombre de covariances par paires augmente de façon exponentielle avec le nombre d'actifs. Faudra donc calculer bcp de paramètres.

Si on calcule large portefeuille, à un moment le bruit statistique sera si élevé, que ce sera impossible de faire une interprétation assez robuste.

Si mes données sont de mauvaise qualité, je vais faire des erreurs dans mes calculs et ça aura de grands effets sur mes choix de portefeuille.

Empiriquement, les portefeuilles naïfs ( $1 / N$ ) (où j'investis 1% de ma richesse sur  $N$  actifs) ou les portefeuilles à variance minimale ont des niveaux de performance (rendement) qualitativement similaires à ceux des portefeuilles à variance moyenne à cause des erreurs faites dans les calculs d'efficience de portefeuille.

Y a des limites conceptuelles :

### 1- Est-ce qu'un seul facteur c'est suffisant ?

CAPM est un modèle à un facteur. bcp d'experts ont défié le CAPM en demandant si 1 facteur était assez.

CAPM était développé par des académicien : Fin 1950s – moitié 1960s. 10 ans + tard, des théoriciens ont demandé si 1 facteur c'était assez.

- 1<sup>ère</sup> alternative introduite par Ross (1976) via développement de la **théorie des prix d'arbitrage**. Approche pragmatique qui dit que le rendement attendu des actions est une combinaison linéaire de primes de risque d'un ensemble de facteurs à déterminer statistiquement (analyse en composantes principales) ou à partir de la théorie économique. Ils ont recommandé d'utiliser une méthode statistique : *l'analyse en composantes principales*. L'idée est que PTA considère un large ensemble de variables (200) & identifier les principaux composants parmi ces variables. C'est une méthode statistique. Puis, les analystes essaient d'associer ces principaux composants à tous ceux qui étaient utilisés au départ. C'est une manière de sélectionner parmi un très large nombre d'indicateur des sous-ensembles de facteurs qui sont statistiquement très reliés aux returns. C'est un moyen extrême de reconnaître qu'on ne connaît pas les facteurs.
- 2<sup>nde</sup> alternative plus pratique introduite par Fama-French. Ils définissent une relation où la prime de risque pour l'actif  $I$  est donnée par la formule qu'on voit sur le ppw. Ici, si on néglige  $\alpha$  & SMB & HML. Si on oublie cela on a le CAPM qui dit que la prime de risque d'un actif risqué est  $B \times$  le rendement excédentaire du marché. F-F ajoute 3 choses au CAPM :
  - 1) Ils ajoutent un 1<sup>er</sup> facteur qui est l'écart de rendement entre grandes et petites capitalisations. on voit que la taille compte sur le marché financier donc y a une prime de risque pour investir dans des plus petites entreprises. Les investisseurs devraient donc être récompensés.
  - 2) Y a un 2<sup>nd</sup> facteur : HML : écart de rendement entre les actions de valeur (faible valeur marchande) et de croissance (valeur marchande élevée). Si la firme a une faible valeur marchande (=low market to book ratio), ça veut dire que sa valeur est plus ou moins donnée par la valeur de ses actifs(=ses équipements).

Une entreprise avec une valeur marchande élevée (=high market to book ratio), est une entreprise qui ne dérive pas des actifs qu'elle détient mais de qqch d'autre. Cela est lié à ses actions de croissance (=growth stocks) en opposition à la valeur marchande.

La valeur d'une startup est pas définie par son équipement (ordinateurs..) mais par se perspectives de croissances.

F-F disent que y a un le lien entre actions de valeurs (action stocks) & action de croissance (growth stocks) permet aux investisseurs de recevoir une prime de risque.

F-F est un modèle à 3 facteurs : le marché, la taille & la croissance.

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i[r_M - r_f] + \beta_{SMB}SMB + \beta_{HML}HML$$

Ils considèrent aussi  $\alpha$  qui est une mesure des effets fixes (=fixed effects) qui correspondent aux Er qui ne peuvent pas être attribués aux facteurs de risques. On peut les attribuer aux compétences des gestionnaires d'actifs. Un bon gestionnaire d'actifs doit pouvoir donner un  $\alpha$  positif.

$\alpha$  peut aussi être négatif : avec un mauvais gestionnaire d'actifs.

Ajd les gestionnaires d'actifs utilisent bcp l'expression *Smart beta*. On construit des indices non pas à partir de la capitalisation (comme le portefeuille de marché) mais, par exemple, des contributions au risque, des rendements des dividendes, de la croissance des ventes ... selon cette approche, ces indices expliquent mieux les rendements : surperformer les gérants «traditionnels»

## 2- peut-on tester le CAPM ?

le CAPM est une théorie donc il faut la tester.

Il faut tester la validité statistique de la relation CAPM :

$$E[r_i] = r_f + \beta_i(E[r_M] - r_f)$$

En 1977, Roll formule une critique. Il dit que le CAPM ne peut être testé.

1. Il y a une tautologie : tout portefeuille de moyenne-variance efficace satisfait exactement la relation
2. CAPM. Le portefeuille de marché doit inclure tous les actifs dispo (actions, obligations, immobilier, voiture..), or on ne peut pas observer tous ces actifs donc c'est impossible de tester le CAPM. C'est un problème méthodologique que de ne pouvoir tester une théorie qu'on a formulée.

Il y a d'autres modèles que le CAPM.

## 2/Les modèles actuariels d'évaluation des stocks

### A. Le modèle des gains actualisés.

Il y a, le modèle de gains actualisés (=the discounted earnings model). Il définit l'EPS comme les gains par action (=earnings per share=EPS)

En fait, c'est le gain après-taxes de l'entreprise, en euros, divisé par le nombre d'actions existants.

$$P = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{EPS}{(1+r)^t} = \frac{EPS}{r}$$
$$\Rightarrow r = EPS/P \Leftrightarrow PER = \frac{P}{EPS}$$

On peut dire que le prix d'une action est la valeur actualisée (=discounted value) de ses gains actualisés sur une période infinie.

PER = rapport de gain de prix = c'est un ratio de 2 variables aisément observables chez des entreprises cotées : prix d'une action / gain par action.

Le PER donne une mesure de la «cherté» d'un titre: temps de remboursement des actions, c'est-à-dire le nombre d'années (maintien du BPA constant) pour «récupérer» le prix de l'action. Ainsi, le PER est généralement exprimé en années

PER sont surtout utilisés pour comparer les entreprises d'un même secteur.

On fait une hypothèse selon laquelle le PER devrait être homogène au sein d'une industrie donnée, car les entreprises partagent des modèles commerciaux, des technologies, des réseaux de distribution communs ...

Ces PER doivent pas être identiques mais similaires.

La grande hétérogénéité intra-sectorielle du PER est le signe d'un potentiel d'actions sous / surévaluées.

Si Roche a un PER de 22, je me demande si y a une justification pour laquelle PER de Roche > PER de l'industrie. Peut-être que Roche est très innovante. Mais si y'a pas de raison objective à cela, je me dis que les actions de Roche sont surévaluées.

Si PER Roche < PER industrie, peut-être que Roche est très nulle. Mais si y'a pas de raison objective à cela, je me dis que les actions de Roche sont sous-évaluées et que je dois vendre mes actions Roche.

Limite : y a pas de théorie PER. Mais c'est un indicateur très pragmatique donc les analystes l'utilisent bcp.

### B. Le model Gordon-Shapiro (1956)

2<sup>nd</sup> modèle : Gordon-Shapiro(1956) aussi appelé, modèle d'actualisation des dividendes (=dividend discount model).

Ce modèle dit que la valeur d'une action est la valeur actualisée des dividendes sur un horizon temporel infini. De plus, les dividendes devraient croître à un taux annuel de g%

$$P = \frac{D_0(1+g)}{(1+r)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+r)^n}$$

$$= \sum_{t=1}^N \frac{D_0(1+g)^t}{(1+r)^t} = \frac{D_0(1+g)}{r-g} \text{ as } N \text{ tends to infinity and } r > g$$

D0 = dividendes d'aujourd'hui

D1 = prévision des dividendes de demain réalisée sur la base d'une analyse financière de l'entreprise = D0 (1+g). en pratique on remplace D0 (1+g) par D1.

g>r = effet de croissance > effet de remise (discount effect)

Si g>r : le cours de l'action tend vers l'infini.

#### Au niveau des entreprises :

Le modèle Gordon-Shapiro a été introduit à une époque où de nombreuses entreprises versaient des dividendes et s'engageaient (de manière plus ou moins crédible) à augmenter les dividendes. Cette idée est typique chez les grandes eses US dans les 1950s mais ça s'applique aussi aujourd'hui : les politiques de dividendes sont très hétérogènes. Beaucoup d'entreprises ne paient pas de dividendes de manière régulière.

Celles qui paient de manière régulière, ne les augmentent pas vraiment d'une année à l'autre.

#### Au niveau du marché :

Néanmoins, le ratio de distribution moyen (dividendes sur bénéfices) est plus stable au niveau de l'industrie ou du marché. Dans la pratique, le Gordon-Shapiro est souvent utilisé pour se forger un jugement sur le niveau global des cours des actions.

Le prix est remplacé par le cours des actions (=price of stocks).

$$\frac{P}{EPS} = \frac{\frac{D_1}{EPS}}{r-g}$$

P = valeur marchande globale des actions

D = dividendes globaux payés par toutes les entreprises cotées du marché

G = croissance du pib

Si on utilise CAPM, on ferait un jugement sur r. on peut utiliser le modèle G-S pour voir si on peut refaire la G-S au niveau agrégé. Si on voit que PER et la formule du ppw ne coïncident pas c'est que y a un problème : ce problème c'est P.

Ce cadre permet d'évaluer le niveau des cours des actions.

- En utilisant les valeurs historiques des ratios de distribution et du coût des capitaux propres ( $r$ ), déduire le taux de croissance des dividendes compatible avec les prix observés.
- En supposant que  $g$  est une approximation de la croissance économique, la valeur calculée de  $g$  est-elle compatible avec la croissance potentielle?
- Sinon, c'est un signe que le marché est trop cher (=surévalué).

## Chapitre 4 : contrat à terme (=forward contracts)

### A. Opérations à terme et gestion de portefeuille

Si les rendements de deux actifs sont **parfaitement** et négativement corrélés, il devient possible de construire un portefeuille sans risque à partir de ces deux actifs.

Quand le prix d'un actif augmente, le prix de l'autre actif baisse & les 2 variances se compensent parfaitement. Ça entraîne une position sans risque car sa valeur ne change jamais.

De tels actifs existent-ils ?

- **NON**: dans la pratique, les corrélations sont généralement positives, parfois (faiblement) négatives mais en général positives. Ça reflète l'existence d'un risque systématique qui est l'effet agrégé d'un ensemble de facteurs → en général, les rendements changent plus ou moins dans la même direction pour la majorité des actions. En pratique, il n'y a donc pas de relation aussi parfaite de corrélation.

- **OUI**: on pourrait considérer la stratégie d'investissement suivante:

- i. Un investisseur détient une obligation d'une valeur de 102 €. Il est exposé à une perte de valeur de l'obligation (=le risque d'intérêt).
- ii. L'investisseur s'engage (=commits) aujourd'hui auprès d'une contrepartie à vendre l'obligation dans un mois à 102 €, le prix étant fixé aujourd'hui. Ça veut dire que la contrepartie s'engage à acheter l'obligation dans 1 mois à 102 euros.
- iii. L'investisseur détient désormais un portefeuille comprenant:
  1. l'obligation
  2. Un accord de vente à terme (engagement) (=a forward selling agreement)

- Un mois plus tard, l'engagement de vente (=selling commitment) arrive à maturité :

1. *Scénario 1*: la valeur de l'obligation est de 98 € (scénario négatif)

- L'investisseur perd 4 € sur l'obligation

- L'investisseur gagne 4 € sur l'engagement de vente, c'est-à-dire que l'engagement de vente à terme permet à l'investisseur de vendre l'obligation à 102 € à la contrepartie.

→ La variation de valeur du portefeuille est nulle ( $-4+4 = 0$ ).

2. *Scénario 2*: la valeur de l'obligation est de 108 € (scénario positif)

- L'investisseur gagne 6 € sur l'obligation

- L'investisseur perd 6 € sur l'engagement de vente, soit le l'engagement de vente à terme oblige l'investisseur à vendre l'obligation à 102 €.

→ La variation de valeur du portefeuille est nulle ( $+6 - 6 = 0$ ).

- Les gains et les pertes se compensent parfaitement.
- Les deux actifs (obligation et contrat de vente à terme) ont une corrélation parfaitement négative

Via le contrat à terme, on a construit une position qui a une corrélation négative avec la position initiale qui est de détenir l'obligation.

- Est-ce toujours le même résultat?

Supposons maintenant que le contrat de vente à terme définit un prix de 100 € en un mois pour l'obligation. (même schéma : on trouve une contrepartie qui l'achètera dans 1 mois etc)

1. *Scénario 1*: la valeur de l'obligation est de 98 €

• L'investisseur perd 4 € sur l'obligation

• L'investisseur gagne 2 € sur l'engagement de vente, l'engagement de vente à terme permet à l'investisseur de vendre l'obligation à 100 €.

• La variation de valeur du portefeuille est une perte de 2 €.

2. *Scénario 2*: la valeur de l'obligation est de 108 €

• L'investisseur gagne 6 € sur l'obligation

• L'investisseur perd 8 € car l'engagement de vente à terme l'oblige à vendre l'obligation à 100 €.

• La variation de valeur du portefeuille est une perte de 2 €.

- L'investisseur a fixé un prix de vente de 100 €. Le portefeuille devient sans risque car la perte de 2 € est certaine. Qu'importe ce qui se passe, on sait au moment où on conclue le contrat de vente à terme, qu'on va perdre 2 euros car on promet aujourd'hui de vendre à 100 euros dans un mois, un actif qui vaut 108 euros aujourd'hui. Donc c'est un portefeuille sans risque.

C'est donc possible de créer une position sans risque alors qu'on a que des actifs risqués.

## B. Contrats à terme et transfert de risque

- Dans l'exemple précédent, le risque d'intérêt de l'obligation (càd le risque d'une variation de prix de l'obligation) n'a **pas** disparu. Il a juste été transféré de l'investisseur à la contrepartie. La contrepartie a acheté l'obligation. A un prix fixé aujourd'hui sans savoir sa valeur future (qui pourrait être + élevée ou + basse). C'est donc mtn la contrepartie qui supporte le risque.

Les économistes nomment les contrats à terme, des contrats dérivés (=derivative contract) car ça dérive d'un actif, ici l'obligation.

On pense souvent que les contrats à terme font disparaître des risque de manière miraculeuse : ce n'est pas le cas. Ces contrats ne font qu'organiser le transfert du risque entre les agents économiques.

Ici, les investisseurs étaient soumis aux risques de l'obligation. Via le contrat à terme, le risque a été transféré à la contrepartie.

Cela implique que :

- Les agents (ou institutions) moins averses au risque supporteront plus de risque à l'équilibre. Si on laisse les agents économiques transférer les risques librement, les agents les moins averses au risque vont accepter plus de risque quand les agents les plus averses au risque vont essayer de transférer le risque → concentration du risque sur un ensemble limité d'agents (compagnies d'assurance, fonds spéculatifs (= hedge funds) ...).
- Ainsi, les établissements moins averses au risque doivent être réglementés (surveillance, exigences de fonds propres ou de réserves ...).

## C. La montée en puissance des contrats à terme.

Les contrats à terme ne sont pas un phénomène nouveau. Les contrats avec livraison différée des récoltes sont une pratique qui remonte à l'antiquité. Cependant, les contrats étaient toujours bilatéraux.

Les premiers marchés à terme organisés ont vu le jour à Chicago dans la seconde moitié du XIXe siècle: le CBOT et le CME. Ces deux marchés existent toujours et sont toujours leaders dans le domaine. On y trouve des contrats à terme dans tous les domaines : il y a donc des contrats à terme relatifs aux obligations mais également aux matières premières telle que la viande par exemple.

En France, le Matif a été ouvert en 1986. Aujourd'hui, le marché est opéré par Euronext (principalement des contrats sur indices boursiers et certaines matières premières).

Les transactions à terme représentent 40% de toutes les transactions financières. 80% des opérations à terme portent sur des contrats de taux d'intérêt (contrats Libor 3 mois négociés

sur le CME et le LIFFE) = on fixe aujourd'hui le taux d'intérêt qu'on a sur un investissement, aujourd'hui pour des transactions futures.

- Volume: en juin 2020, la valeur nominale globale des contrats à terme négociés sur le marché représentait «un intérêt ouvert» de 31 455 Mds USD dans le monde (données BRI).

#### D. Caractéristiques d'un contrat à terme

Un contrat à terme lie deux parties qui conviennent de procéder à une transaction future dont les caractéristiques sont fixées immédiatement. ça couvre en particulier:

- i. La date de la future transaction (=date de livraison).
- ii. La qualité et la quantité de l'actif sous-jacent à la transaction. Quand l'actif sous-jacent est un actif financier, c'est facile de définir sa qualité mais parfois c'est plus compliqué. C'est le cas quand cet actif est une matière première (ex : quand c'est du pétrole)
- iii. Le prix de la future transaction. Ce prix est fixé aujourd'hui.

#### Vocabulaire :

Acheter (vendre) un contrat à terme signifie en fait que vous êtes l'acheteur (vendeur) de l'actif sous-jacent. Au départ, le contrat n'est ni acheté ni vendu, mais deux contreparties s'entendent sur le contrat.

Cependant, il est possible pour les deux parties d'échanger le contrat (càd ses obligations contractuelles) avec des tiers. Si on veut acheter l'obligation à une future date, on peut vendre à quelqu'un l'opportunité.

#### E. Détermination du prix d'une transaction à terme

Les 2 parties acceptent de s'engager aujourd'hui à réaliser une transaction future.

#### Notations :

$t$  : aujourd'hui

$T$  : date de livraison

$(T-t)$  : échéance, exprimée en années

$S_t$  : prix de l'actif en date  $t$

$F_t$  : prix de la transaction à terme fixé en  $t$

$r$  : rendement de l'actif non risqué

$y$  : rendement attendu de l'actif sous-jacent

je conclus un contrat à terme en tant **qu'acheteur** :

- i. Je renonce au rendement (attendu) de l'actif entre  $t$  et  $T$  car j'entre le contrat en tant qu'acheteur, je n'achète pas l'actif sous-jacent immédiatement donc

j'abandonne le rendement attendu de l'actif entre t et T. je supporte un coût d'opportunité.

- ii. En même temps, je n'achète pas l'actif donc je peux investir le montant  $S_t$  dans l'actif sans risque entre t et T. ça produit un revenu d'intérêts

Donc, le gain disponible pour acheter le sous-jacent en T est alors:

$$S_t e^{(r-y)(T-t)}$$

Montant capitalisé  $S_t$  et je reçois le rendement de l'actif moins le coût d'opportunité. Le rendement net de l'investissement est  $r-y$ . A T, j'ai en poche, l'argent que je vais utiliser pour acheter l'actif car en T, je dois répondre à mon engagement et acheter l'actif.

Avec  $F_t$  le prix à terme, deux possibilités doivent être envisagées:

i.  $S_t e^{(r-y)(T-t)} > F_t$

= montant disponible > prix à terme que je dois payer en T = je suis acheteur donc je fais un profit. l'achat à terme est une stratégie rentable car le montant disponible à T est supérieur au prix  $F_t$ . Tous les investisseurs seront prêts à acheter à terme. Par conséquent, les vendeurs à terme augmenteront le prix qu'ils demandent pour avoir une part du profit.

i.  $S_t e^{(r-y)(T-t)} < F_t$

= à la date de livraison, le montant disponible < prix à terme. l'achat à terme est une stratégie de perte d'argent car le montant disponible à T est inférieur au prix demandé  $F_t$ . Comme personne ne sera prêt à acheter à terme. Par conséquent, les vendeurs à terme diminueront le prix qu'ils demandent.

Ça entraîne un prix d'exercice du contrat à terme :

$$S_t e^{(r-y)(T-t)} = F_t$$

Remarques :

$$F_t = S_t e^{(r-y)(T-t)}$$

En t, la valeur actuelle nette du contrat est de 0. En effet, comme le profit/perte attendu du contrat est de 0, sa valeur actuelle est de 0.

$F_t$  agrège les informations sur y (le rendement attendu de l'actif sous-jacent). En t, on observe le Prix au coutant (=spot price) de l'actif qui est échangé sur le marché. le rendement de l'actif non risqué est connu également. L'échéance du contrat est aussi connue. La seule variable aléatoire de cette formule est le rendement attendu de l'actif sous-jacent.

$F_t$  est appelé le prix d'exercice du contrat, noté K.

Et, en  $t$ , la définition de  $F_t$  peut être réécrite ainsi :

$$\begin{aligned}
 K &= S_t e^{(r-y)(T-t)} \text{ là on remplace } F_t \text{ par } K \\
 \Leftrightarrow K e^{-r(T-t)} &= S_t e^{(r-y)(T-t)} e^{-r(T-t)} \\
 \Leftrightarrow K e^{-r(T-t)} &= S_t e^{(r-y-r)(T-t)} \\
 \Leftrightarrow K e^{-r(T-t)} &= S_t e^{(-y)(T-t)} \\
 \Leftrightarrow 0 &= S_t e^{-y(T-t)} - K e^{-r(T-t)}
 \end{aligned}$$

à  $t_0$ , le profit & le gain du contrat à terme est 0.

Au fil du temps, le prix au comptant de l'actif sous-jacent fluctue, entraînant des gains/pertes par rapport au contrat à terme. Donc, pour  $t' > t$  (donc un peu plus tard que  $t$ ):

$$f_{t'} = S_{t'} e^{-y(T-t')} - K e^{-r(T-t')} \quad (1)$$

Le rendement attendu de l'actif non risqué reste constant. Idem pour  $K$ . la seule variable qui change ici est le prix de l'actif et la date.

En  $t'$ , il est possible de conclure un autre contrat à terme avec la même date de livraison  $T$ , avec le prix à terme prévalant à  $t'$  qui est  $F_{t'}$ . Ça donne une nouvelle relation :

$$0 = S_{t'} e^{-y(T-t')} - F_{t'} e^{-r(T-t')} \quad (2)$$

A  $t'$ , le rendement attendu & le profit attendu de ce nouveau contrat est également 0.

La différence entre (1) & (2) entraîne :

$$f_{t'} = (F_{t'} - K) e^{-r(T-t')} \leq 0$$

Cette expression c'est les gains/pertes sur le contrat à terme proviennent des variations du prix à terme dans le temps. Qd on conclue un contrat en  $t$  et que dans les jours suivants on voit que le prix de l'actif change, (l'échéance diminue) on a donc un profit ou un gain selon ces changements de prix dans le temps.

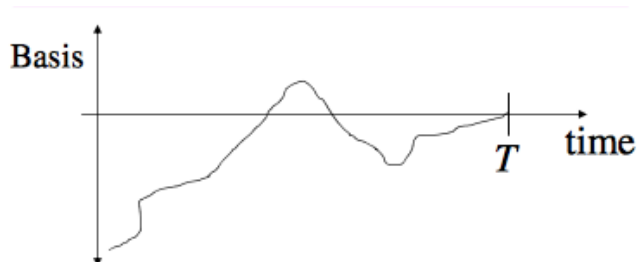
Quand on conclue le contrat on est dans une position neutre (pas de gain ni de perte) mais quand le temps passe, je gagne ou je perds de l'argent.

Attention: ceci s'applique pour une date de livraison fixe  $T$ .

En général, en  $t$ ,  $F_t - S_t \neq 0$ . Le prix à terme est différent du prix coûtant. Cette différence est appelée la **base du contrat**.

Avec une date de livraison  $T$  fixe, le prix à terme  $F_t$  et le prix au comptant  $S_t$  doivent converger à l'approche de  $T$ .

Représentation graphique de cette remarque :



On a une base négative. Cette base fluctue quand le temps passe mais en T, cette base doit être 0. Pourquoi ?

Imaginons, qu'en T (date de livraison) on ait le choix entre 2 stratégies :

- 1) acheter l'actif sous-jacent au contrat.
- 2) Acheter l'actif à terme avec une date de livraison T (=immédiatement).

Pas de différence entre ces 2 stratégies donc le prix coûtant en T doit être égal au prix à terme. Donc en T, la différence est 0.

on peut faire un profit en achetant l'actif & le revendant immédiatement à un prix plus élevé.

Avant T, la différence entre  $F_t$  et  $S_t$  est une variable aléatoire.

Si cette différence est pas de 0, il y a une opportunité d'arbitrage.

Si  $F_t > S_t$  : *contango* :

Si  $F_t < S_t$  : *backwardation*

### Que se passe-t-il à la date de livraison?

Livraison de l'actif sous-jacent: action, obligation, matière première ...

Dans de nombreux cas, l'acheteur est moins intéressé par la livraison physique du sous-jacent que par la réalisation du gain/de la perte implicite dans le contrat → cette situation se nomme règlement en espèces (=cash settlement)

Les investisseurs sont plus intéressés par la transaction physique que par l'actif.

Le règlement en espèces permet la dissociation du trading (achat / vente) du sous-jacent et de l'opération de couverture (=hedging transaction). Concrètement, une position avant est mise en place. A (ou vers) la date de livraison, l'investisseur négocie l'actif sur le marché au comptant et réalise une perte ou un profit sur le contrat à terme.

### Comment arrêter prématurément un contrat à terme?

En prenant une autre position à terme, avec la même date de livraison mais en la direction opposée (acheter si vendre et inversement).

Les deux engagements se compensent, c'est-à-dire pas d'engagement net.

### ***Illustration 1 : Couvrir la valeur d'une obligation (=hedging the value)***

Le propriétaire d'une obligation peut couvrir la valeur de son portefeuille en étant le vendeur dans un contrat à terme.

Si la valeur de l'obligation diminue, le gain sur le contrat à terme compense (au moins partiellement) la perte sur l'obligation, l'inverse étant vrai.

Un investisseur spéculé que l'obligation gagnera de la valeur sera l'acheteur dans le contrat à terme.

Si l'obligation gagne de la valeur, il l'achètera au prix inférieur à celui fixé dans le contrat et réalisera un profit sur la différence entre le prix à terme et le prix au comptant à la date de livraison.

Dans ce cadre, le comportement spéculatif de l'acheteur est une condition nécessaire à l'existence de la couverture du vendeur. En fait, les 2 situations ici explicitées sont les deux signes d'un même contrat : on a l'idée que le contrat à terme transfère le risque du propriétaire de l'obligation vers un autre qui spéculé que l'obligation gagnera de la valeur. Y a pas de valeur énorme entre couvrir (=hedging) & spéculer car ce sont juste les deux côtés d'une même transaction.

### ***Illustration 2 : règlement en espèces (=cash settlement)***

*Imaginons :*

Une entreprise empruntera de l'argent dans 6 mois afin de construire une nouvelle usine. Cependant, le taux d'intérêt du prêt (YTM d'une obligation souveraine + spread) ne sera fixé que dans 6 mois. Situation habituelle : quand les banques s'engagent auprès des entreprises pour leur prêter de l'argent dans le futur, elles ne s'engagent pas quant aux taux d'intérêt qu'elles fixeront. Ce taux d'intérêt sera déterminé selon les conditions prévalant au moment où le prêt sera mobilisé.

La firme est exposée à une hausse des taux d'intérêt au cours des 6 prochains mois. On ne connaît pas le taux d'intérêt qu'il y aura dans 6 mois.

Pendant ce temps, pour couvrir le risque, l'entreprise peut «vendre» un contrat à terme avec sous-jacent l'obligation souveraine qui définit le taux d'intérêt.

Si le YTM de l'obligation augmente pendant les 6 mois:

- L'entreprise emprunte à un taux plus élevé auprès de sa banque.
- L'obligation souveraine perd de la valeur car quand YTM augmente, le prix baisse.
- L'entreprise reçoit un bénéfice (règlement en espèces) du contrat à terme, qui compense (au moins partiellement) les frais d'intérêts plus élevés. En T, l'entreprise achète l'obligation sur le marché et le vend au prix qui est le prix à terme du contrat. L'obligation souveraine a perdu de la valeur donc le prix de marché est inférieur au

prix initialement annoncé donc l'entreprise fait du profit. Ça compense parfaitement la hausse de YTM.

## F. Principes généraux de couverture

Quel que soit l'actif échangé (action, obligation, indice, matière première, taux d'intérêt ...), les règles suivantes s'appliquent.

1. Si l'investisseur est exposé de manière défavorable à des augmentations de rendement, c'est-à-dire à des baisses de prix, il doit alors être vendeur dans un contrat à terme.
2. Si l'investisseur est exposé de manière négative à des baisses de rendement, c'est-à-dire à des augmentations de prix, il doit être acheteur dans un contrat à terme.

Ces principes contingents sont dépendants de la décision de se couvrir (ou non).

## G. Contrats à terme et contrats futurs

Il y a une différence entre les contrats futurs & les contrats à terme même si le mécanisme économique est le même pour les 2 contrats.

Les contrats à terme sont des contrats de « over the counter » (OTC), c'est-à-dire que les deux contreparties sont directement en contact. Il y a une négociation directe entre le vendeur & l'acheteur.

*Avantage* : toutes les caractéristiques du contrat peuvent être adaptées entre les deux parties. → **FLEXIBILITÉ**

*Inconvénient* : Les gains / pertes ne se matérialisent qu'à la date de livraison → les pertes peuvent s'accumuler considérablement dans le temps. Les deux parties sont « piégées » dans le contrat. Il n'y a pas de moyen d'échapper au contrat. Le contrat est adapté aux deux parties donc ça peut être très difficile de trouver une autre contrepartie.

Pour résoudre cette difficulté, les futurs contrats sont des contrats à terme :

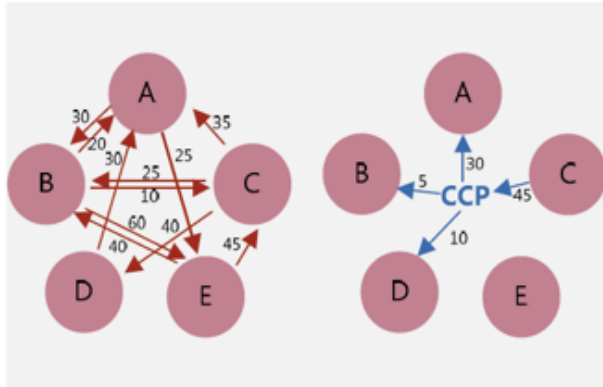
- Négociés sur un marché où un intermédiaire, appelé « central counterparty clearing house » (CCP), intervient entre acheteurs et vendeurs. Les contrats sont standardisés. Les prix à terme sont le résultat de la confrontation de l'offre et de la demande.
- où les gains / pertes sont calculés et réalisés quotidiennement, c'est-à-dire que -tous les jours- les gains sont payés et les pertes doivent être compensées par des appels de marge.

- Quelle est la justification des futurs marchés ?

Les marchés à terme permettent la compensation de positions via les participants du marché.

Cette situation s'illustre via la figure ci-dessous qui compare le marché OTC (en rouge) et le marché futur (en bleu)

From non-centrally cleared to centrally cleared exposures



Dns le marché OTC, tous les patticipantsn'ont que des relations bilatérales avec les autres participants du marché. ces rlations sont représentées par des flèches.

Sur le futur marché, la CCP centralise toutes les transactions & les participants n'ont que des relations nettes envers la CCP.

*Avantage principal des futurs marchés* : si le propriétaire d'un actif ne peut payer les appels de marge (=margin calls), la CCP se substitue à la contrepartie défaillante la CCP est à risque.

La CPP est donc à risque. C'est la garantie pour les participants du marché que toutes les transactions auront lieu.

Dans un second temps, la CPP tentera de récupérer sa réclamation auprès de la partie défaillante.

Cela limite quand même l'accumulation de risques (ce qui pourrait arriver dans un contrat OTC) et facilite la supervision.

- **Calcul des appels de marge**

**Pour une position d'achat : (je conclue un contrat à terme où j'achète un actif)**

Si l'ordre est exécuté pendant les heures de trading, le profit / perte journalier est la différence entre le cours à terme  $C_A$  et le cours de clôture quotidien  $C_T$  x la valeur nominale du contrat :

$$\text{Margin call} = (C_A - C_T) \times NV$$

Si la position est plus ancienne, le profit / perte journalier est la variation du cours de clôture entre T-1 et T x la valeur nominale du contrat :

$$\text{Margin call} = (C_{T-1} - C_T) \times NV$$

### Pour une position de vente :

Les définitions précédentes doivent être inversées

### Illustration :

Oimaginons qu'on entre le futur marché, mercredi 5: Position d'achat avec prix d'exercice de 105,80. A cette date, je m'engage à acheter l'actif en date T (=date de livraison) au prix de 105,80.

105,85 est le prix de clôture à cette date : j'ai fait un profit potentiel. Je me suis enegagée à acheter l'actif à 105,80euros.

Le contrat est proposé en% de la valeur nominale (ici 100 000 €).

A la fin de la journée, des investisseurs s'engagent à acheter le même actif à la même date mais à un prix plus élevé que moi.

Ça peut refléter le fait que ces investisseurs anticipent que le prix de l'actif sous-jacent augmentera dans le futur.

Ce profit me sera payé. La paie marginal :  $105,80\% - 105,85\% \times 100\,000 = 50$ . C'est un chiffre négatif car la formule qu'on a vu avant est la définition d'un appel de marge et un appel de marge négatif est un profit.

Quand le prix de clôture augmente, je reçois une paie de marge. Si tous les jours le prix de clôture augmente, tous les jours je reçois une paie marginale. Entre lundi 10 & mardi 11, le prix de lcôture baisse donc mon prfit potentiel sur le contrat futur baisse donc il y a un appel de marge et je paie 1150 .entre mardi 11 & mercredi 12 je reçois une paie marginale de 700. Ça se passe comme ça jusqu' à T.

| Dates   | Closing price% | Spread/ Preceding day (%) | Margin paid (profit) | Margin call (loss) |
|---------|----------------|---------------------------|----------------------|--------------------|
| Wed. 5  | 105,85         | -                         | 50                   | -                  |
| Thu. 6  | 106,20         | 0,35                      | 350                  | -                  |
| Fri. 7  | 106,60         | 0,40                      | 400                  | -                  |
| Mon. 10 | 106,40         | -0,20                     | -                    | 200                |
| Tue. 11 | 105,25         | -1,15                     | -                    | 1150               |
| Wed.12  | 105,95         | 0,7                       | 700                  | -                  |